Université Pierre et Marie Curie

École Doctorale Paris Centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Emmanuel Jacob

Processus de Langevin réfléchis au second ordre

---

dirigée par Jean Bertoin

Soutenue le 10 décembre 2010 devant le jury composé de :

Jean Bertoin	Université Paris VI	Directeur de thèse
Thomas Duquesne	Université Paris VI	Examinateur
Aimé Lachal	INSA de Lyon	Rapporteur
Grégory Miermont	Université Paris-Sud	Examinateur
Paavo Salminen	Åbo Akademi University	Rapporteur
Lorenzo Zambotti	Université Paris VI	Examinateur

Université Paris VI - UPMC
Laboratoire de Probabilités et
Modèles Aléatoires - LPMA
4, place Jussieu - Case courrier 188
75252 Paris cedex 05

École doctorale Paris Centre
4, place Jussieu - Case courrier 188
75252 Paris cedex 05

Remerciements...

... À Jean Bertoin, mon directeur de thèse, en tout premier lieu. Mentor exceptionnel, très à l'écoute dès notre première rencontre, présent quand il le faut, il recadrait mes divagations, me proposait les points de vue et les notations les plus élégants et les mieux adaptés, et m'ouvrait les portes de possibilités nouvelles lorsque je me croyais déjà arriver à une impasse.

... À Thomas Duquesne, Grégory Miermont, et Lorenzo Zambotti, pour avoir endossé le rôle d'examinateur. Je suis tout particulièrement reconnaissant envers mon rapporteur Aimé Lachal, qui a relu ma thèse avec une minutie exemplaire, pour me proposer maintes corrections et améliorations. Ce travail exigeant de rapporteur fut également assuré par Paavo Salminen, envers qui j'ai une pensée toute spéciale, puisqu'il devait nous arriver d'Helsinki hier, mais a malheureusement été retenu, au dernier moment, pour cause de grève. Grève en Finlande, non en France, notons-le.

... À tous les membres de ce laboratoire, administratifs comme mathématiciens, qui en font un lieu si propice à la recherche, tout en étant si agréable à vivre, si convivial.

... À tous les doctorants, fidèles camarades de vie au quotidien. Pour le climat, je remercie tout particulièrement Thanh Mai, puis le duo des Sophie, lesquelles furent accessoirement, l'une, une source intarissable d'aide généreuse, en particulier informatique, et l'autre, une représentante des thésards remarquable, bien plus que moi-même ! Je ne peux pas ne pas citer chacun des autres membres de mon bureau, au caractère si résolument international : Kilian, Alexander, Fernando, Guanying, Abass, Assane, Elie, Romdhane, Dominique, Lakshithe, Pascal, Minmin, Xinxin.

... À ma mère, qui fut la première à m'initier aux joies du monde des mathématiques. À mon père, à mes frères et soeurs, Bernadette, Claire, Elisabeth, Jean-Pascal, Marie, Vincent. À mes beaux-frères, mes belles-soeurs, mon neveu, mes nièces, à toute ma famille.

... À ces quelques rencontres amicales et mathématiques, mais avant tout amicales. Yves de Cornulier, mais aussi Miquel Oliu-Barton, Mathieu Merle.

... À mes amies, à mes amis. Aux présents. Aux absents.

... À Matthias et Thomas. Notre amitié prouve, chaque jour, que Mathématique et Musique forment une belle harmonie.

Résumé introductif

Cette thèse propose une rencontre entre un objet stochastique, le processus de Langevin, c'est-à-dire l'intégrale du mouvement brownien, et une équation différentielle, celle du rebond "au second ordre", laquelle, à ma connaissance, a été étudiée jusqu'ici presque exclusivement dans un cadre déterministe.

Historiquement, le processus de Langevin était un modèle concurrent du mouvement brownien pour décrire les trajectoires erratiques de particules comme celles observées par Brown. Au même titre, les processus de Langevin réfléchis au second ordre sont un modèle concurrent des mouvements browniens réfléchis, lesquels sont toujours réfléchis au premier ordre, selon notre terminologie.

Si le processus de Langevin – respectivement le processus de Langevin réfléchi au second ordre – ne prétend pas rivaliser avec le mouvement brownien – respectivement le mouvement brownien réfléchi – pour ce qui est de son rayonnement et de son champ d'applications dans des domaines variés, il se prétend néanmoins être un modèle physique plus pertinent.

Par ailleurs, pour la réflexion au second ordre déterministe, lorsque la force a un caractère fortement oscillant, l'équation différentielle admet, de manière assez générique, plusieurs solutions. Lorsque c'est un processus de Langevin qui est réfléchi, nous devons considérer l'équation différentielle, stochastique maintenant, lorsque la force est un bruit blanc... Nos prouverons néanmoins toujours l'existence d'une unique solution, au sens faible. Ces résultats contrastent fortement avec les résultats de non-unicité pour l'équation déterministe.

Cette thèse s'articule autour de quatre chapitres. Le premier est une large partie introductrice, rédigée en français, dans un style discursif. Les trois suivants sont, tels quels, les articles que j'ai écrits (en anglais) au cours de cette thèse, publiés ou en voie de publication.

Dans le premier chapitre, je commence par décrire le contexte historique, ancien comme récent, motivant cette étude. J'introduis d'une part la réflexion au second ordre, d'autre part le processus de Langevin et en particulier ses excursions, rappelant des résultats connus auxquels nous ferons appel.

Je donne alors un aperçu de plusieurs notions et outils techniques que nous utiliserons. Il s'agit d'abord, en plus de la célèbre mesure d'excursion d'Itō d'un processus markovien, de la mesure d'excursion de Pitman d'un processus stationnaire. Il s'agit ensuite du principe des $h-$transformées, au sens de Doob, utilisées pour définir des processus de Markov conditionnés. Enfin, je résume en détail (et en français) les trois chapitres suivants.

Le deuxième chapitre comporte d'abord une introduction au processus de Langevin stationnaire, puis une étude de sa mesure d'excursion de Pitman. Ce travail est alors appliqué à l'étude du processus de Langevin réfléchi sur une barrière totalement inélastique.

Le troisième chapitre commence l'étude du processus de Langevin réfléchi sur une barrière partiellement élastique. Nous mettons en évidence l'existence de deux régimes bien distincts, selon la valeur du coefficient d'élasticité de la réflexion, comparée à la valeur critique $\exp(-\pi/\sqrt{3}) \simeq 0,163$. En régime surcritique et critique, la principale difficulté est liée au cas où le processus réfléchi part de zéro avec vitesse nulle. Nous montrons que le processus reste alors bien défini de manière unique.

Le quatrième chapitre s'attaque au régime sous-critique, plus difficile. En particulier, quelle que soit la condition initiale, en un temps fini le processus se retrouvera en 0 avec vitesse nulle. Nous montrons encore l'existence d'un unique processus réfléchi, décrit cette fois-ci via sa mesure d'excursion d'Itō.

Mots-clefs

processus de Langevin, réflexion au second ordre, théorie des excursions, stationnarité, théorie du renouvellement, équation différentielle stochastique.

Second order reflected Langevin processes

Introductory summary

This thesis proposes an encounter between a stochastic object, the Langevin process, that is the integral of the Brownian motion, and a differential equation, the “second order reflection”, which, to my knowledge, has been studied until now almost exclusively in a deterministic framework.

Historically, the Langevin process was a competing model of the Brownian motion for the description of the erratic trajectories of particles such as the ones observed by Brown. In the same way, the second order reflected Langevin processes are a competing model of reflected Brownian motions, which should always be understood as first order reflected Brownian motions, according to our terminology.

The Langevin process and the second order reflected Langevin processes do not pretend to vie with the Brownian motion and the reflected Brownian motion for their influence and their range of applications in various domains. They still pretend to be a more relevant physical model.

Besides, for the deterministic second order reflection, when the force has a strongly oscillating behavior, the differential equation has generically several solutions. When a Langevin process is reflected, we should consider the stochastic differential equation, when the force is a white noise... We will show nonetheless the existence of a unique solution, in a weak sense. This result is in sharp contrast with the non-uniqueness results in the deterministic case.

This thesis has four chapters. The first one is a long introduction to the subject, written in French in a discursive style. The other three ones are published or still unpublished articles I wrote during my thesis, written in English.

In the first chapter I start with the description of the old and recent historical context motivating the study. On the one hand I introduce second order reflection. On the other hand I introduce the Langevin process and its excursions, recalling some results that we will use later on.

Then I give an overview of various notions and tools that we will need. I mean, firstly, in addition to the famous Itō excursion measure of a Markov process, the Pitman excursion measure of a stationary process. I mean, next, the $h-$transforms principle, in the sense of Doob, used to define conditioned Markov processes. Finally I give a detailed abstract, in French, of the three following chapters.

The second chapter contains, first, an introduction to the stationary Langevin process, then a study of its Pitman excursion measure. This work is applied to the study of the Langevin process reflected on a totally inelastic boundary.

The third chapter starts the study of the Langevin process reflected on a partially elastic boundary. We highlight the existence of two clearly distinct regimes, according to the value of the elasticity coefficient of the reflection, compared to the critical value $\exp(-\pi/\sqrt{3}) \simeq 0.163$. In the supercritical and critical regimes, the main difficulty is related to the case when the process starts from 0 with zero speed. We show that the process stays uniquely defined.

The fourth chapter deals with the more difficult subcritical regime. In particular, whatever the initial condition, after a finite time the process will be at zero with zero speed. We still show the existence of a unique reflected process, described this time via its Itō excursion measure.

Keywords

Langevin process, second order reflexion, excursion theory, stationarity, renewal theory, stochastic differential equation.

Table des matières

1 Introduction **11**
1.1 Contexte historique 12
1.1.1 Mouvement brownien et processus de Langevin 12
1.1.2 Réflexion au premier ordre 12
1.1.3 Réflexion au second ordre 14
1.1.4 Processus de Langevin réfléchis au second ordre. Travaux existants . 17
1.2 Processus de Langevin 19
1.2.1 Propriétés élémentaires 19
1.2.2 Excursions du processus de Langevin 20
1.3 Outils utilisés 23
1.3.1 Mesure d'excursion d'un processus stationnaire, au sens de Pitman 23
1.3.2 Temps local et théorie des excursions d'Itō 24
1.3.3 Les $h-$transformées au sens de Doob 27
1.4 Présentation des articles 30
1.4.1 Excursions de l'intégrale du mouvement brownien 30
1.4.2 Processus de Langevin réfléchi sur une barrière partiellement élastique I 34
1.4.3 Processus de Langevin réfléchi sur une barrière partiellement élastique II 39

2 Excursions of the integral of Brownian motion **45**
2.1 Introduction 47
2.2 Preliminaries 47
2.3 Stationary Kolmogorov process 48
2.3.1 Stationarity and duality lemmas 49
2.3.2 Construction of the stationary Kolmogorov process 51
2.4 Excursions of the stationary Langevin process 53
2.4.1 Stationary excursion measure 53
2.4.2 Conditioning and $h-$transform 57
2.5 Reflected Kolmogorov process 59
2.5.1 Preliminaries on the reflected Kolmogorov process 59
2.5.2 Itō excursion measure of the reflected Langevin process 61
2.6 Appendix 67

3 Langevin processes reflected on a partially elastic boundary I **71**
3.1 Introduction . . . 73
3.2 Preliminaries . . . 74
3.2.1 Notations . . . 74
3.2.2 The sequence $(\zeta_n, V_n)_{n\geq 0}$ . . . 77
3.2.3 Weak convergence to a spatially stationary process . . . 82
3.3 Entering with zero velocity . . . 83
3.3.1 Convergence of shifted processes . . . 86
3.3.2 Proof of Lemma 7 in the supercritical case . . . 88
3.3.3 Proof of Lemma 7 in the critical case . . . 92
3.4 Appendix . . . 98

4 Langevin processes reflected on a partially elastic boundary II **101**
4.1 Introduction . . . 103
4.2 Preliminaries . . . 104
4.3 The reflected Kolmogorov process conditioned on never hitting $(0,0)$ . . . 107
4.3.1 Definition via an $h-$transform . . . 107
4.3.2 Starting the conditioned process from $(0,0)$ . . . 109
4.4 The resurrected process . . . 114
4.4.1 Itō excursion measure, recurrent extensions, and (SOR) equations . . . 114
4.4.2 The unique recurrent extension compatible with P_t^c . . . 117
4.4.3 The weak unique solution to the (SOR) equations . . . 120

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte historique

1.1.1 Mouvement brownien et processus de Langevin

Le nom mouvement brownien fait référence au botaniste Robert Brown, qui en 1827 a observé un mouvement erratique de particules à l'intérieur de grains de pollen. L'enjeu fut alors de décrire, tant mathématiquement que physiquement, ce mouvement. Une approche, une réponse, est celle apportée par Thiele (1880), Bachelier (1900), et surtout Einstein (1905) pour le point de vue physique. Cette approche définit le mouvement brownien tel qu'on le connaît aujourd'hui, ou processus de Wiener. Ce processus est devenu incontestablement le processus stochastique de base, de référence. Néanmoins, cela ne signifie pas pour autant qu'il s'agissait de la seule manière de modéliser le mouvement observé par Brown, ni même de la meilleure. Langevin (1908) propose également sa propre solution au problème, définissant un processus qu'il appelle alors mouvement brownien, et qui est maintenant connu sous le nom de processus de Langevin.

Dans les deux cas il s'agit de décrire une particule en suspension dans un fluide, le fluide étant composé d'un grand nombre de "petites" particules qui heurtent la particule de manière aléatoire. Pour Einstein, les chocs sont suffisamment importants (les particules du milieu suffisamment massives) pour que la vitesse de la particule soit aléatoire à chaque instant et décorrélée. La vitesse de la particule est alors un bruit blanc, et la position suit un processus de Wiener. Au contraire, pour Langevin, les chocs n'ont pas cette importance, ils se contentent d'induire une force aléatoire et décorrélée, à savoir un bruit blanc. Si on ne considère pas d'autre force (en particulier, force de frottement), la vitesse de la particule suit alors un processus de Wiener. La position de la particule se comporte donc comme un processus de Langevin libre, que nous appellerons plus sobrement processus de Langevin. Notons que l'équation de Langevin (contenant le terme de frottement) s'écrit dans un cadre physique plus classique : la particule a une vitesse bien définie, et son équation du mouvement est celle d'une particule soumise à deux forces, le frottement d'une part, et la force aléatoire de type bruit blanc d'autre part. L'équation de Langevin décrit aussi plus fidèlement les mouvements des particules observées par Brown. Cependant, sur une grande échelle de temps, la solution de l'équation de Langevin est assez proche d'un processus de Wiener.

1.1.2 Réflexion au premier ordre

Après avoir introduit ces deux modèles de trajectoires aléatoires pour les particules, nous souhaitons modéliser les chocs de ces particules. Quitte à privilégier une direction, nous nous intéressons à la réflexion d'une particule sur une barrière fixe, et nous nous concentrons sur la dimension $d = 1$. Nous proposerons deux modèles bien distincts de réflexion, tous deux définis pour des particules déterministes aussi bien que stochastiques.

Le premier modèle est la réflexion que je nomme "au premier ordre". Intuitivement, la barrière peut "pousser" la particule, uniquement vers le haut, de sorte à empêcher celle-ci de traverser la barrière. Rigoureusement, désignons par Y la trajectoire continue (ou le processus stochastique à trajectoires continues) à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $Y_0 \geq 0$, qui "dirige le mouvement", c'est-à-dire la trajectoire que la particule suivrait s'il n'y avait pas de barrière. On appelle trajectoire réfléchie X une trajectoire continue solution de l'équation suivante :

$$X = Y + L, \tag{1.1.1}$$

où X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et où L est une fonction croissante au sens large, et qui ne croît que sur l'ensemble $\{X = 0\}$, c'est-à-dire $\mathbb{1}_{X_t>0}\mathrm{d}L_t = 0$.

La fonction L modélise la poussée de la barrière. Les seules propriétés qu'on lui demande sont de pousser vers le haut (L est croissante) et de ne pousser que lorsque la particule la touche ($X = 0$). Signalons tout de suite que lorsque Y est dérivable, et aux instants où la particule ne touche pas la barrière, on a toujours $\dot{X} = \dot{Y}$. En un certain sens la barrière peut modifier la position de la particule, mais pas sa vitesse. D'une part, ceci justifie la terminologie "réflexion au premier ordre". D'autre part, cela suggère que la trajectoire de la particule est intrinsèquement donnée par sa dérivée première (ou par ses accroissements, si Y n'est pas dérivable), puisque pour la trajectoire réfléchie (inconnue) on impose uniquement la valeur de $\dot{X}$ en dehors de 0 (ou la valeur des accroissements de X).

La réflexion au premier ordre est un problème entièrement résolu. En effet, un résultat de Skorohod bien connu énonce que l'équation (1.1.1) admet toujours une unique solution, donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_t & = & Y_t + L_t \\ L_t & = & \sup\limits_{s\in[0,t]} \max(-Y_s, 0). \end{array} \right. \tag{1.1.2}$$

Si $Y_0 = 0$, on a encore $X_t = Y_t - \inf_{[0,t]} Y_s$.

Cette construction est trajectorielle. Si Y est un processus stochastique, par exemple le mouvement brownien, l'équation (1.1.1) est alors une équation différentielle stochastique ; elle admet une unique solution, au sens fort, donnée par (1.1.2).

En particulier, nous définissons ainsi le mouvement brownien réfléchi en 0. Les mouvements browniens réfléchis sont étudiés et utilisés depuis longtemps, dans des domaines variés. Pour ne citer qu'une application, ils se révèlent être un outil fort utile dans l'étude du problème a priori déterministe de l'équation de la chaleur dans un domaine avec condition de Neumann à la frontière.

Par ailleurs, notons qu'il existe d'autres constructions d'un processus de même loi que le mouvement brownien réfléchi en 0, par exemple en prenant la valeur absolue d'un mouvement brownien, ou encore en utilisant la théorie des excursions d'Itō et en déterminant sa mesure d'excursion (voir partie 1.3.2 sur la théorie des excursions). Cependant la construction donnée ici est la seule construction, trajectorielle, d'une (de la) solution, à partir du mouvement brownien canonique.

1.1.3 Réflexion au second ordre

Le deuxième modèle proposé est la réflexion “au second ordre”. Dans ce modèle, il existe un coefficient c fixé une fois pour toutes, attaché à la barrière (ou à la réflexion). Ce coefficient positif ou nul est appelé coefficient d'élasticité ou coefficient de restitution de la vitesse. Le cas $c = 1$ correspond à un rebond parfaitement élastique, le cas $c = 0$ à une barrière totalement inélastique.

Intuitivement, on pose simplement que si la particule heurte la barrière avec une vitesse incidente $v \leq 0$, alors elle s'en éloignera instantanément avec vitesse $c|v|$. Lorsque c et v sont tous deux non-nuls cela suffit à décrire proprement le rebond. Il s'agit d'un type de réflexion très naturel, pour les processus dont la vitesse est bien définie – notons cependant que ce n'est pas le cas pour le mouvement Brownien. Par ailleurs, on inclut le cas $c > 1$, qui n'est pas foncièrement différent, mathématiquement parlant, même si son interprétation physique est moins naturelle puisque la particule gagne de l'énergie lors d'un rebond. Mais il est temps de donner une définition rigoureuse de cette réflexion au second ordre avec coefficient d'élasticité c.

De même que pour la réflexion au premier ordre, désignons par Y la trajectoire C^1 (ou le processus stochastique à trajectoires C^1) à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $Y_0 \geq 0$, qui “dirige le mouvement”. On appelle trajectoire réfléchie X une trajectoire solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} X_t &= Y_0 + \int_0^t \dot{X}_s \\ \\ \dot{X}_t &= \dot{Y}_t - (1+c) \sum_{0<s\leq t} \dot{X}_{s-} \mathbb{1}_{X_s=0}, \end{cases} \tag{1.1.3}$$

où X et $\dot{X}$ sont càdlàg (et donc $\dot{X}_{s-}$ désigne la limite à gauche de $\dot{X}$ en s).

Les termes non-nuls de la somme correspondent précisément aux rebonds : lorsque la particule atteint la barrière ($X_s = 0$) avec une vitesse incidente non-nulle ($\dot{X}_{s-} < 0$), alors la vitesse est bien instantanément ramenée à $\dot{X}_s = -c\dot{X}_{s-}$. Lorsque Y est deux fois dérivable et en dehors de la barrière, on a toujours $\ddot{X} = \ddot{Y}$, ce qui justifie la terminologie de réflexion au second ordre. Ici, la trajectoire est dirigée par la force extérieure [1] $\ddot{Y}$.

Ces équations ne semblent peut-être pas compliquées de prime abord. Et en effet elles ne le seraient pas si le nombre de rebonds effectués par la particule était fini, si la somme ne possédait qu'un nombre fini de termes non-nuls. Mais ce n'est pas toujours le cas, les rebonds peuvent s'accumuler, essentiellement de deux manières différentes. Premièrement, ils peuvent s'accumuler avant un temps fini. Deuxièmement, ils peuvent s'accumuler juste après le temps initial si $X_0 = \dot{X}_0 = 0$, ou, de manière similaire, juste après un temps d'arrêt T vérifiant $X_T = \dot{X}_T = 0$.

L'étude de ces équations n'a donc rien de trivial, et a fait l'objet d'une certaine littérature depuis déjà 50 ans. En 1960, Bressan [9] est ainsi le premier à remarquer qu'il

1. A proprement parler, la force extérieure est égale à la masse de la particule multipliée par son accélération. Mais ici on ne s'intéresse pas réellement aux unités, ce qui fait que pour simplifier on peut considérer que la masse vaut 1 et confondre la force et $\ddot{Y}$.

peut y avoir plusieurs solutions pour une force lisse (i.e C^∞). Il conjecture aussi qu'il y a unicité lorsque la force est polynomiale. En 1978, Schatzman [36] pose un formalisme plus général et montre un théorème général d'existence de solutions. En 1985, Percivale [32] montre qu'il y a unicité lorsque la force est analytique. En 1998, Schatzman [37] parvient à généraliser ce résultat à une force dépendant aussi de la position et de la vitesse, et fonction analytique du temps, de la position et de la vitesse. En 2000, Ballard [2] a encore généralisé à des systèmes plus complexes, avec plusieurs degrés de liberté.
En ce qui nous concerne, nous nous contentons de fournir un exemple simple de force C^k, où k est un entier quelconque mais fixé, pour laquelle les équations (SOR) admettent plusieurs solutions. Il s'agit d'une adaptation mineure d'un exemple donné par Jean Bertoin dans [5] dans le cadre d'un rebond totalement inélastique ($c = 0$).

Non-unicité pour la réflexion au second ordre déterministe, un contre-exemple

Si y est la trajectoire à réfléchir, qui vérifie $y_0 = \dot{y}_0 = 0$, rappelons que l'équation de réflexion au second ordre revêt la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_t &=& \int_0^t \dot{x}_s \\ \\ \dot{x}_t &=& \dot{y}_t - (1+c)\sum_{0<s\le t} \dot{x}_{s-}\mathbb{1}_{x_s=0}. \end{array}\right.$$

Changeons d'inconnue en introduisant $z := x - y$. L'équation se réécrit alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_t &=& \int_0^t \dot{z}_s \\ \\ \dot{z}_t &=& -(1+c)\sum_{0<s\le t} (\dot{y}_s + \dot{z}_{s-})\mathbb{1}_{z_s=-y}, \end{array}\right.$$

où z est une trajectoire restant toujours au-dessus de $-y$. Sur les intervalles sur lesquels $z > -y$, la fonction z est linéaire. Aux instants t où $z_t = -y_t$, on doit avoir

$$\dot{y}_t = -(\dot{z}_{t-} + c\dot{z}_t)/(1+c).$$

Il s'agit maintenant de trouver y fonction C^{k+2} (de sorte que la force $\ddot{y}$ soit C^k) et deux fonctions z_1 et z_2 telles que toutes ces conditions soient satisfaites.

Pour cela, nous commençons par construire z_1 et z_2, vérifiant $z_1(0) = z_2(0) = 0$. La fonction z_1, de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, est déterminée par

$$\left\{\begin{array}{l} z_1(2^{2n}) = 2^{2n(k+3)} \\ z_1 \text{ est affine sur } [2^{2n}, 2^{2(n+1)}] \end{array}\right. \qquad \text{, pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

La fonction z_2 est définie de la même manière par

$$\left\{\begin{array}{l} z_2(2^{2n+1}) = 2^{(2n+1)(k+3)} \\ z_2 \text{ est affine sur } [2^{2n+1}, 2^{2n+3}] \end{array}\right. \qquad \text{, pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

Par leur construction, les fonctions z_1 et z_2 sont convexes, croissantes, et vérifient la propriété d'autosimilarité suivante

$$z(4u) = 4^{k+3}z(u) \text{ pour tout } u \geq 0.$$

On cherche alors à construire la fonction y, de telle sorte que les rebonds aient lieu exactement aux instants de la forme 2^{2n} pour la trajectoire z_1, aux instants de la forme 2^{2n+1} pour la trajectoire z_2. Nous allons naturellement choisir y vérifiant en plus la même propriété d'autosimilarité.

Sur $[1,4]$, la fonction y doit vérifier plusieurs conditions. Premièrement, nous devons avoir $y(1) = -1$, $y(2) = -2^{k+3}$, $y(4) = -4^{k+3}$, et la fonction $-y$ doit rester strictement en-dessous de $z_1 \wedge z_2$ sur $]1,2[\cup]2,4[$. De plus, nous devons avoir

$$\begin{array}{rcl} \dot{y}(1+) &=& -(\dot{z}_1(1-) + c\dot{z}_1(1))/(1+c) \\ \dot{y}(2) &=& -(\dot{z}_2(2-) + c\dot{z}_2(2))/(1+c) \\ \dot{y}(4-) &=& -(\dot{z}_1(4-) + c\dot{z}_1(4))/(1+c). \end{array}$$

Remarquons qu'alors $y(4) = 4^{k+3}y(1)$ et $\dot{y}(4-) = 4^{k+2}\dot{y}(1+)$. Rajoutons la condition que y est C^{k+3} sur $[1,4]$ et vérifie, pour $l = 0, ..., k+3$, la condition $y^{(l)}(4-) = y^{(l)}(1+)$ (où $y^{(l)}$ est la dérivée $l-$ième de y). Il n'est pas difficile de construire une telle fonction.

Nous pouvons alors étendre y en une fonction C^{k+3} sur $\mathbb{R}_+^*$, par autosimilarité. En posant $y(0) = 0$, nous l'étendons en une fonction C^{k+2} sur $\mathbb{R}_+$, encore par autosimilarité. Finalement, toutes les conditions vérifiées par y montrent bien que z_1 et z_2 sont deux solutions, bien distinctes.

Nous espérons que cet exemple illustre à la fois simplement et précisément les raisons de la non-unicité des solutions aux équations du second ordre. Nous avons utilisé une propriété d'auto-similarité, mais c'était seulement pour construire facilement la fonction y et garantir son comportement C^{k+2}. De manière plus informelle, exiger que deux trajectoires z_1 et z_2 soient solutions n'impose de conditions restrictives sur y (presque) qu'aux instants de rebonds, dénombrables, et laisse (presque) toute latitude de construire y en dehors de ces instants de rebond. Les exemples de non-unicité semblent donc être assez génériques, même si dans chaque exemple construit de la sorte, la force $\ddot{y}$ présente nécessairement de fortes irrégularités dans le sens où elle change de signe une infinité de fois près de 0 (i.e y possède une infinité de points d'inflexion juste après 0).

Dans cette thèse la trajectoire que l'on souhaite réfléchir est un processus de Langevin. L'équation différentielle stochastique s'écrit alors sous la forme

$$(SOR) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} X_t &=& X_0 + \int_0^t \dot{X}_s \\ \\ \dot{X}_t &=& \dot{X}_0 + B_t - (1+c)\sum_{0<s\leq t} \dot{X}_{s-}\mathbb{1}_{X_s=0}, \end{array} \right. \tag{1.1.4}$$

où B est le mouvement brownien dirigeant l'EDS, $(X_0, \dot{X}_0)$ est la condition initiale et $(X, \dot{X})$ est le processus inconnu. La force est donc un bruit blanc... D'une part, le caractère oscillant du bruit blanc, avec les considérations ci-dessus, dissuade sérieusement d'envisager de résoudre l'équation de manière purement trajectorielle, sans utiliser l'aléa. Nous ne le ferons pas. D'autre part, il pourrait suggérer l'existence de multiples solutions à (1.1.4). Ce n'est pas le cas. Les résultats de cette thèse, peut-être surprenants, sont tous des résultats d'existence et d'unicité du processus de Langevin réfléchi, au sens faible.

Tentons néanmoins d'appréhender cette différence entre le cas aléatoire et le cas déterministe. Dans le contre-exemple construit, deux arguments semblent être spécifiques au caractère déterministe de l'équation. Le premier est que l'on peut séparer clairement les instants de rebond de nos deux solutions. Le deuxième est que la force est construite de manière "ad hoc" par rapport à la trajectoire z, de sorte que le rebond se passe comme nous voulons qu'il se passe.

Le premier argument semble difficile à mettre en œuvre dans un cadre aléatoire. Mais il ne s'agit là peut-être que d'une difficulté technique. Quant au deuxième argument, il devient plus spectaculairement faux. En effet, lors d'un choc, la force se comporte, en loi, comme un bruit blanc, et pas autrement (nous pouvons invoquer un argument de propriété de Markov).

Nous arrêtons là nos pseudo-considérations, et introduisons maintenant les quelques travaux qui se sont intéressés aux processus de Langevin réfléchis au second ordre.

1.1.4 Processus de Langevin réfléchis au second ordre. Travaux existants

L'histoire commence en 2004, lorsque B. Maury s'intéresse à un processus de Langevin réfléchi sur une barrière totalement inélastique [30], c'est-à-dire le cas $c = 0$. Plus précisément, son modèle décrit le mouvement de particules (ou individus) en zone très peuplée. Lorsque deux particules se rencontrent, leur collision est totalement inélastique, et on peut penser qu'elles ne se sépareront plus et formeront le début d'un agrégat.

Mais dans la modélisation qu'il introduit, lorsque les trajectoires des particules sont des processus de Langevin, B. Maury n'arrive pas à totalement exclure la possibilité pour les agrégats de se disloquer. Nous ne rentrons pas plus en profondeur sur ses simulations et sur le caractère signifiant de cette observation. Toujours est-il que cela l'a poussé à poser des questions, en particulier des questions d'ordre théorique. Il préconise ainsi une analyse rigoureuse de l'équation différentielle stochastique modélisant des processus de Langevin et des rebonds inélastiques, que ce soit pour réfuter la possibilité pour les agrégats de se disloquer, ou au contraire pour la confirmer.

Dans notre modèle simplifié où l'on considère une unique particule, en dimension 1, et réfléchie sur une barrière fixe, la question-clef qui se pose est celle de l'existence d'un processus de Langevin réfléchi sur une barrière inélastique (c=0), qui ne soit pas absorbé une fois qu'il a atteint la barrière.

Jean Bertoin a répondu intégralement à cette question au travers de deux articles. Dans [4], il propose une construction explicite d'un processus qui se comporte comme un processus de Langevin en dehors de 0, dont la vitesse est absorbée en 0, et qui ne passe pas

de temps en 0 (a fortiori le processus est bien non-absorbé). Sa construction, astucieuse, met d'abord en jeu une réflexion "à la Skorohod" d'un processus de Langevin libre, définie par (1.1.2) comme pour la solution à la réflexion au premier ordre. Puis, un changement de temps a pour effet d'absorber tous les intervalles de temps durant lesquels la particule reste en 0. Cet article répond à la question de l'existence d'un "processus de Langevin réfléchi" – ainsi qu'à celle de l'unicité en loi – du point de vue des processus de Markov et des excursions.
Dans [5], il montre que le processus construit est l'unique solution, au sens faible, de l'équation différentielle stochastique régissant le mouvement (1.1.4) (dans le cas $c = 0$, toujours). Notons que du point de vue de l'équation différentielle, on n'imposait pas a priori la condition que le processus ne devait pas passer de temps en 0. Les équations du mouvement imposent donc ce comportement. Par ailleurs, nous soulignons encore une fois que ce résultat d'unicité, bien que faible, est en contraste flagrant avec la non-unicité rencontrée dans le cas déterministe.

Voilà donc pour le rebond inélastique, le seul à avoir déjà été étudié en détail. La question délicate était de (re)partir de 0, à savoir trouver une loi (ou les lois) d'entrée pour le processus, comprendre comment le processus quitte la barrière avec une vitesse nulle.

Dans les autres cas, $c > 0$, une autre question – plus simple – se pose avant même d'aborder la précédente. Partant en dehors de 0, ou bien partant de 0 avec une vitesse strictement positive, la particule va-t-elle se retrouver en 0 avec une vitesse nulle ? A savoir, la particule ne peut pas avoir une vitesse nulle à son premier instant de retour en zéro ou après un nombre fini de retours en zéro (cet événement est de probabilité nulle), mais il est possible que les rebonds s'accumulent en temps fini et que la particule se retrouve alors, au terme de cette infinité de rebonds, en 0 avec vitesse nulle.

Cette question a déjà été abordée par J.Bect dans sa thèse intitulée "processus de Markov diffusifs par morceaux" [3]. Une partie de sa thèse s'intéresse à des systèmes qui sont régis par une équation différentielle stochastique "continue" et par des sauts "forcés", c'est-à-dire des sauts qui interviennent de manière déterministe en fonction de la géométrie du processus. En particulier, dans la partie III.4.B, il étudie notre processus [2] bidimensionnel $(X, \dot{X})$. Il s'interroge sur la possible accumulation de rebonds en temps fini, qu'il nomme "phénomène de Zénon". En s'appuyant sur des travaux existants et par d'autres arguments élémentaires, il prouve l'existence d'un coefficient critique $c_{crit} \simeq 0,16$. Pour $c > c_{crit}$, la vitesse de la particule aux instants de rebonds successifs tend vers $+\infty$, et il n'y a donc pas de phénomène de Zénon. Pour $c < c_{crit}$ ces vitesses tendent vers 0, suggérant qu'il puisse y avoir phénomène de Zénon.

Cependant, Julien Bect s'arrête là dans son étude, en ouvrant sur quelques questions naturelles qui se posent. Dans les deux articles "Langevin process reflected on a partially elastic boundary" (chapitres 3 et 4 de cette thèse), nous étudions le système dans chacun des cas, $c > c_{crit}$, $c = c_{crit}$ et $c < c_{crit}$, et répondons, entre autres, à toutes ces questions.

2. Pour être exact son modèle diffère légèrement puisqu'il ajoute une force extérieure gravitationnelle. Cependant les deux équations sont liées par une transformation de Girsanov, comme il le fait lui-même remarquer.

1.2 Processus de Langevin

1.2.1 Propriétés élémentaires

Le processus de Langevin $(Y_t)_{t\geq 0}$ de position initiale $Y_0 = x$ et de vélocité initiale $\dot{Y}_0 = u$ est défini par

$$Y_t = x + ut + \int_0^t B_s \mathrm{d}s, \qquad t \geq 0, \tag{1.2.1}$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard (i.e partant de 0). Cette définition correspond bien à un processus dont la dérivée seconde est un bruit blanc, et donc dont la dérivée première $\dot{Y}_t = u + B_t$ est un mouvement brownien (partant de u). De cette expression (1.2.1) découlent simplement plusieurs propriétés du processus de Langevin. La première est qu'il s'agit d'un processus **à trajectoires $\mathcal{C}^1$**. Il en découle aussi, pour $t_0 > 0$ fixé et pour $t > 0$,

$$Y_{t+t_0} = Y_{t_0} + \dot{Y}_{t_0} t + \int_0^t \widetilde{B}_s \mathrm{d}s,$$

où $(\widetilde{B}_t)_{t\geq 0} := (B_{t+t_0} - B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard indépendant de $(B_t)_{t\leq t_0}$. Par conséquent, le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ ***n'est pas* un processus de Markov**, mais le processus bidimensionnel $(Y_t, \dot{Y}_t)$ en est un. C'est une des raisons pour lesquelles on étudie souvent ce processus bidimensionnel, encore appelé **processus de Kolmogorov**, à la place du processus de Langevin. On notera désormais $\mathbb{P}_{x,u}$ la loi du processus de Kolmogorov de position initiale $(Y_0, \dot{Y}_0) = (x, u)$. En pratique, le processus de Langevin et le processus de Kolmogorov étant trivialement liés, on ne s'attachera pas toujours à bien les différencier. En particulier la même notation $\mathbb{P}_{x,u}$ désignera aussi la loi du processus de Langevin, ce qui n'entraîne pas de confusion possible.

L'écriture sous forme intégrale montre encore que les processus de Langevin et de Kolmogorov sont des **processus gaussiens**. Plus précisément, la loi de $(Y_t, \dot{Y}_t)$ sous $\mathbb{P}_{x,u}$ est un vecteur gaussien d'espérance $(x + ut, u)$ et de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} t^3/3 & t^2/2 \\ t^2/2 & t \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, le processus de Kolmogorov $(Y, \dot{Y})$ est un processus de Markov dont les probabilités de transition $\mathbb{P}_{x,u}\Big((Y_{t+s}, \dot{Y}_{t+s}) \in \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}v\Big)$ sont continues par rapport à la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}v$ et données par

$$\frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} \exp\Big[-\frac{6}{t^3}(y - x - tu)^2 + \frac{6}{t^2}(y - x - tu)(v - u) - \frac{2}{t}(v - u)^2 \Big] \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}v, \tag{1.2.2}$$

ce que l'on écrira encore $p_t(x, u; \mathrm{d}y, \mathrm{d}v)$ ou $p_t(x, u; y, v)\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}v$, le terme $p_t(x, u; y, v)$ désignant les densités de transition.

Par ailleurs, le processus de Langevin hérite du mouvement brownien une propriété d'**invariance par changement d'échelle** (ou par rescaling). En effet, pour tout $k > 0$,

en écrivant
$$k^3 Y_{k^{-2}t} = k^3 Y_0 + k\dot{Y}_0 t + \int_0^t kB_{k^{-2}s}\mathrm{d}s,$$
et en observant que $(kB_{k^{-2}t})_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard, on obtient que $(k^3 Y_{k^{-2}t})_{t\geq 0}$ est un processus de Langevin partant de $k^3 Y_0$ avec vitesse $k\dot{Y}_0$. De manière non formelle, pour le mouvement brownien, multiplier le temps par k multiplie l'espace par $k^{1/2}$, tandis que pour le processus de Langevin, multiplier le temps par k multiplie l'espace par $k^{3/2}$. Il s'agit d'une observation assez basique mais d'une grande importance tout le long de cette thèse, et qu'il nous arrivera d'utiliser sans le mentionner explicitement.

Notons que l'on a une **loi du $\mathbf{0-1}$** pour le processus de Langevin. En effet, notons $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration canonique associée au processus Y. A savoir, $\mathcal{F}_t$ est la tribu engendrée par $(Y_s)_{s\leq t}$, et complétée comme d'habitude de sorte à contenir les ensembles négligeables (i.e les ensembles contenus dans un ensemble mesurable de probabilité nulle) et à être continue à droite. Remarquons qu'elle coïncide avec la filtration canonique associée au processus de Kolmogorov $(Y, \dot{Y})$, ou encore avec celle du mouvement brownien B. Par conséquent, la tribu $\mathcal{F}_0$ est triviale. De la même manière que pour le mouvement brownien, cet argument, avec un argument de symétrie, montre que le processus de Langevin partant de 0 avec vitesse nulle change de signe une infinité de fois juste après le temps initial. La propriété d'invariance par changement d'échelle (par exemple) montre alors que le processus change également de signe en des temps arbitrairement grands. Ce résultat "de récurrence" pour le processus de Langevin ne doit cependant pas cacher que le processus de Kolmogorov "(position, vitesse)" est transitoire.

1.2.2 Excursions du processus de Langevin

Diverses fonctionnelles du processus de Kolmogorov ont été étudiées. Nous avons déjà donné la loi du processus $(Y_t, \dot{Y}_t)$ à un temps t fixé ; il s'agissait probablement de la fonctionnelle la plus élémentaire que l'on peut considérer. On obtient d'autres fonctionnelles élémentaires en fixant un niveau a, et en s'intéressant au premier temps d'atteinte de ce niveau ou $\tau_a := \inf\{t > 0, Y_t = a\}$, ainsi qu'à la vitesse du processus en cet instant ou $\dot{Y}_{\tau_a}$. Une autre possibilité est de fixer la vitesse b et de considérer le temps d'atteinte $\sigma_b = \inf\{t > 0, \dot{Y}_t = b\}$ et la position en cet instant Y_{τ_b}. Soulignons que ce sont les couples de variables qui nous intéressent. En particulier la variable σ_b considérée seule ne nous intéresse pas réellement, puisqu'il s'agit d'un classique temps d'atteinte pour un mouvement brownien.

En 1963, McKean [31] obtient la loi du couple $(\tau_0, \dot{Y}_{\tau_0})$ sous $\mathbb{P}_{0,u}$. Pour $u > 0$ elle est donnée par
$$\mathbb{P}_{0,u}(\tau_0 \in \mathrm{d}s, -\dot{Y}_{\tau_0} \in dv) = \mathrm{d}s\mathrm{d}v \frac{3v}{\pi\sqrt{2}s^2} \exp\Big(-2\frac{v^2 - uv + u^2}{s}\Big) \int_0^{\frac{4uv}{s}} \mathrm{e}^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}}, \quad (1.2.3)$$
pour s, v positifs. La deuxième marginale revêt la forme particulièrement simple suivante :
$$\mathbb{P}_{0,u}(-\dot{Y}_{\tau_0} \in dv) = \frac{3}{2\pi} \frac{u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{3}{2}}}{u^3 + v^3} dv. \quad (1.2.4)$$

Ces deux lois sont aussi celles auxquelles nous ferons appel dans chacun des articles.

Par la suite, Lefèbvre [27] et Lachal [22, 23, 24] ont décrit dans le cas général les lois de $(\tau_a, \dot{Y}_{\tau_a})$, de (σ_b, Y_{σ_b}), et même de $(\sigma_{ab}, Y_{\sigma_{ab}})$, où $\sigma_{ab} := \sigma_a \wedge \sigma_b$.

Lachal s'est ensuite intéressé à d'autres fonctionnelles et il a alors étudié de manière systématique les excursions du processus, à la fois comme outil et pour leur intérêt propre. Il faut déjà définir les excursions. Le cadre le plus usuel lorsqu'on parle d'excursions d'un processus est celui des excursions d'un processus markovien en dehors d'un point, pour lequel nous disposons de la théorie d'Itō (voir partie 1.3.2). Mais le processus de Langevin unidimensionnel n'est pas markovien. Quant au processus de Kolmogorov bidimensionnel, partant de la position (x, u), il ne retournera presque sûrement jamais en (x, u) (en particulier (x, u) est irrégulier pour le processus de Kolmogorov). La théorie des excursions en dehors d'un point ne nous apprend alors rien.

Lachal a alors étudié les excursions du processus bidimensionnel en dehors d'une ligne, une ligne "verticale" $Y = a$ ou "horizontale" $\dot{Y} = b$. Plus précisément, il introduit les excursions enjambant un temps déterministe de la sorte : Introduisons

$$\begin{array}{ll}
\tau_{a,T}^- = \sup\{t < T : Y_t = a\}, & \tau_{a,T}^+ = \inf\{t > T : Y_t = a\}, \\
\sigma_{b,T}^- = \sup\{t < T : \dot{Y}_t = b\}, & \sigma_{b,T}^+ = \inf\{t > T : \dot{Y}_t = b\}, \\
\sigma_{ab,T}^- = \sup\{t < T : \dot{Y}_t \in \{a, b\}\}, & \sigma_{ab,T}^+ = \inf\{t > T : \dot{Y}_t \in \{a, b\}\}.
\end{array}$$

Le temps $\tau_{a,T}^-$ est le dernier instant de passage du processus sur la droite $Y = a$ avant l'instant T. Il ne s'agit pas d'un temps d'arrêt, contrairement au temps $\tau_{a,T}^+$, premier temps de retour sur la droite $Y = a$ après l'instant T. Les temps $\sigma_{b,T}^-$, $\sigma_{b,T}^+$, $\sigma_{ab,T}^-$ et $\sigma_{ab,T}^+$ s'interprètent de la même manière. L'excursion "$a-$verticale" enjambant l'instant déterministe T est alors définie par :

$$(Z_{(\tau_{a,T}^- + t) \wedge \tau_{a,T}^+}, t \geq 0).$$

De la même manière, l'excursion "$b-$horizontale" est définie par

$$(Z_{(\sigma_{b,T}^- + t) \wedge \sigma_{b,T}^+}, t \geq 0)$$

et l'excursion "$ab-$horizontale bilatère" par

$$(Z_{(\sigma_{ab,T}^- + t) \wedge \sigma_{ab,T}^+}, t \geq 0).$$

Les excursions horizontales sont liées à des excursions browniennes (il suffit de ne regarder que la dérivée pour obtenir une excursion brownienne). Par ailleurs, une réalisation du processus définit une infinité de petites excursions horizontales en temps fini. Pour leur part, les excursions verticales présentent un comportement foncièrement différent. En particulier une réalisation du processus n'effectue presque sûrement qu'un nombre fini d'excursion en temps fini (sauf condition initiale exceptionnelle $Y_0 = a, \dot{Y}_0 = 0$)

C'est néanmoins la même théorie générale des excursions d'un processus sur laquelle Lachal s'appuie pour les étudier, avec en particulier les résultats de Maisonneuve [28, 29], et de Getoor et Sharpe [12, 13]. Cette théorie permet de considérer les excursions en dehors d'un ensemble M général, qui doit seulement avoir comme propriété d'être fermé, optionnel, et "homogène". Si θ_t désigne l'opérateur de translation spatiale, homogène signifie que l'on a $(M-t)\cap]0,+\infty[=(M\circ\theta_t)\cap]0,+\infty[$ pour tout $t>0$. En particulier la théorie s'applique lorsque l'on choisit pour M l'ensemble des instants en lesquels le processus $(Y,\dot{Y})$ se trouve sur la droite $Y=a$, ou bien sur la droite $\dot{Y}=b$, ou bien sur la réunion de deux droites $\dot{Y}\in\{a,b\}$. La théorie fournit des formules de calcul de fonctionnelles de l'ensemble des excursions du processus (résultats de Maisonneuve), qui permettent alors d'expliciter la loi de l'excursion particulière enjambant l'instant déterministe t (résultats de Getoor et Sharpe), par l'intermédiaire d'une décomposition au dernier instant de passage.

Écrivons $D_t := \inf\{M\backslash[0,t]\}$ le premier instant de retour dans M après t, ainsi que $G_t := \sup\{M\cap[0,t]\}$ le dernier instant de passage dans M avant t, qui n'est pas un temps d'arrêt. Le premier résultat, de Getoor, explicite la loi de $(G_t, Z\circ\theta_{G_t})$ conditionnellement à l'événement $(G_t, Z_{G_t})=(s,g)$. Cette formule est simple si ce n'est qu'elle fait intervenir une mesure $\tilde{\mathbb{P}}_z$ que l'on peut interpréter comme étant la mesure des excursions en dehors de M depuis la valeur initiale z. Dans le cas des excursions verticales, la mesure $\tilde{\mathbb{P}}_z$ n'est autre que la loi de probabilité $\mathbb{P}_z$. Le deuxième résultat, de Getoor et Sharpe, donne la loi du couple (G_t, Z_{G_t}) en "traduisant" le dernier instant de passage en un premier temps d'atteinte pour le processus dual.

1.3 Outils utilisés

Dans la partie précédente nous avons parlé d'excursions pour le processus de Kolmogorov $(Y, \dot{Y})$. La construction de ces excursions – excursions en dehors d'une ligne et qui enjambent un temps déterministe – est une construction *ad hoc*, adaptée à ce processus. De plus, pour un temps déterministe fixé et une ligne fixée, nous obtenons une certaine excursion du processus. Nous n'avons pas la prétention de décrire simultanément l'ensemble des excursions du processus.

Dans cette thèse, nous allons étudier les excursions d'un point de vue différent (bien que lié). En particulier, pour le processus de Langevin, nous allons utiliser une notion de mesure d'excursion stationnaire d'un processus stationnaire, introduite par Pitman dans [33], et que nous décrivons dans la partie à suivre.

Par ailleurs, nous allons aussi utiliser la théorie "classique" d'Itō des excursions en dehors d'un point d'un processus de Markov. En effet, comme nous l'avons déjà évoqué, le point $(0, 0)$ est irrégulier pour le processus de Kolmogorov, rendant la théorie d'Itō triviale. Mais pour certains processus que nous allons introduire, le point $(0, 0)$ sera régulier, et la théorie d'Itō sera nécessaire pour décrire le processus ou le construire.

Enfin, nous donnons un aperçu du principe des $h-$transformées au sens de Doob, un moyen de transformer la loi d'un processus de Markov en multipliant ses probabilités de transition par une fonction harmonique ou surharmonique, décrivant ainsi un processus qui s'interprète généralement comme un processus de Markov "conditionné à sa valeur finale" en un certain sens.

1.3.1 Mesure d'excursion d'un processus stationnaire, au sens de Pitman

Pitman utilise un formalisme proche de celui de la théorie générale des excursions de Maisonneuve, Getoor et Sharpe. Le cadre dans lequel il se place est celui d'un processus stationnaire, et non nécessairement markovien. Plus précisément, le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est indexé par toute la droite réelle, et la "loi" du processus P vérifie la propriété que

$$P(X_t \in \cdot)$$

est indépendant de $t \in \mathbb{R}$. Dans ce formalisme on autorise les processus généralisés, au sens où $P(X_t \in \cdot)$ n'est pas nécessairement une mesure de probabilité, et peut être une mesure $\sigma-$finie – ce qui sera le cas pour le processus de Kolmogorov stationnaire introduit dans le premier article (chapitre 2). Il introduit alors aussi M un ensemble fermé optionnel et homogène, mais inclus dans $\mathbb{R}$, et les instants $D_t := \inf\{M \setminus]-\infty, t]\}$ et $G_t := \sup\{M \cap]-\infty, t]\}$.

Un intervalle d'excursion en dehors de M est alors un intervalle maximal inclus dans M^c. On note encore $R_t = D_t - t$, le "temps de retour dans M après t", et $L = \{t, R_{t-} = 0, R_t > 0\}$ l'ensemble des extrémités gauches d'intervalles d'excursion en dehors de M. Pour $t \in L$, on note ϵ^t l'excursion démarrant à l'instant t, de durée de vie $R(\epsilon^t) := R_t$, définie par

$$\epsilon^t = (X_{t+s})_{0\le s\le R(\epsilon^t)}$$

Elle appartient à l'ensemble des excursions,

$$\mathcal{E} := \{(e_s)_{0<s<R(e)}\}$$

La mesure d'excursion stationnaire (encore appelée “mesure d'excursion d'équilibre” par Pitman) est alors définie par

$$Q_{ex}(\cdot) = P\big[\#\{0 < t < 1, t \in L, \epsilon^t \in \cdot\}\big]. \tag{1.3.1}$$

Il s'agit d'une définition très naturelle, en particulier elle ne dépend pas réellement du choix arbitraire des instants 0 et 1 puisque pour $a < b \in \mathbb{R}$, on a encore :

$$Q_{ex}(\cdot) = \frac{1}{b-a} P\big[\#\{a < t < b, t \in L, \epsilon^t \in \cdot\}\big].$$

Etant donné un temps t fixé, Pitman donne une expression de la loi jointe du dernier instant de passage dans M avant t, à savoir G_t, et de l'excursion enjambant le temps déterministe t, à savoir ϵ^{G_t}. Elle est donnée par la formule simple suivante, faisant intervenir Q_{ex} :

$$P(G_t \in \mathrm{d}s, \epsilon^{G_t} \in \mathrm{d}e) = Q_{ex}(\mathrm{d}e)\mathbb{1}_{R(e)>t-G_t}\mathrm{d}s,$$

pour $e \in \mathcal{E}$ et $s \in]-\infty, t[$. Notons que la notion d'excursion enjambant le temps déterministe t, selon Pitman, est certes liée à la notion correspondante selon Lachal, mais reste distincte, puisque pour Pitman le dernier instant de passage G_t peut prendre des valeurs strictement négatives, alors que ce n'est pas le cas pour Lachal.

1.3.2 Temps local et théorie des excursions d'Itō

Considérons un processus de Markov M à valeurs [3] dans $\mathbb{R}^n$, adapté et à trajectoires continues à droites. Nous supposons que M part de 0 et nous nous intéressons précisément aux excursions de M en dehors de 0. Le cadre de la théorie d'Itō [4] est celui d'un point 0 régulier et instantané. Cela signifie que, partant de 0, le processus atteint $\mathbb{R}^n - \{0\}$ en des temps arbitrairement petits, et revient en 0 aussi en des temps arbitrairement petits. Nous supposerons de plus que 0 est récurrent, à la fois pour simplifier et parce que cela nous suffira. Dans ce cadre, il y a une infinité d'excursions juste après le temps initial, et les excursions ont toutes une durée de vie finie.

Par définition, une excursion e est une portion de trajectoire en dehors de 0, entre deux instants $g(e)$ et $d(e)$ en lesquels la particule est en 0, et fait partie de l'ensemble des excursions (finies) $\mathcal{E} := \{(X_t)_{0\le t\le\zeta} : \zeta > 0, X_\zeta = 0, X_t \neq 0 \text{ pour tout } 0 < t < \zeta\}$.

3. Dans cette thèse nous utiliserons la théorie pour le processus bidimensionnel, c'est-à-dire $n = 2$. Notons que la théorie reste valable dans un espace plus général comme un espace polonais.

4. plus précisément, le cadre dans lequel la théorie d'Itō est non-triviale.

A chaque excursion du processus, nous associerons un indice qui sera un nombre réel décrivant le “temps” (à comprendre au sens de temps local) passé par le processus en zéro avant l’excursion. En considérant les couples “une excursion, son indice”, nous obtiendrons un processus ponctuel sur $\mathcal{E} \times \mathbb{R}_+$. Il s’agira d’un processus ponctuel de Poisson dont l’intensité se factorise sous la forme $m \otimes \mathrm{d}t$. Cette mesure m sur $\mathcal{E}$ sera appelée mesure d’excursion et caractérisera la loi du processus.

La théorie d’Itō se base sur l’introduction d’un temps local. Notons $Z := \{t \geq 0 : M_t = 0\}$ l’ensemble des zéros de M, et $\overline{Z}$ sa fermeture. Voici une définition du temps local :

Définition. *Un processus $L := (L(t))_{t\geq 0}$, continu, croissant au sens large, et $\mathcal{F}_t-$adapté, est appelé un temps local passé par M en 0 si $L(0) = 0$ et :*
(i) Le support de la mesure de Stieltjes $\mathrm{d}L$ est presque sûrement $\overline{Z}$.
(ii) Pour tout temps d’arrêt T tel que $M_T = 0$ p.s. sur $\{T < +\infty\}$, conditionnellement à $\{T < \infty\}$, le processus translaté $(M_{T+t}, L(T + t) - L(T))_{t\geq 0}$ est indépendant de $\mathcal{F}_T$ et a même loi que (M, L).

La première propriété confirme l’intuition qu’un temps local compte un temps passé en zéro. En particulier, les intervalles maximaux sur lesquels un temps local est constant correspondent précisément aux intervalles d’excursion de M. La deuxième propriété indique une propriété de Markov pour le temps local.

Nous admettons l’existence d’un temps local, ainsi que l’unicité du temps local à un facteur multiplicatif près. Nous choisissons désormais L un temps local, fixé une fois pour toutes.

Il est commode d’introduire l’inverse du temps local L^{-1}, défini par $L^{-1}(t) := \inf\{s \geq 0, L(s) > t\}$. Cet inverse est un processus croissant continu à droite, dont les sauts correspondent aux excursions.

Comme nous l’avons annoncé, une excursion est indicée par la valeur du temps local en 0 lorsqu’a lieu l’excursion. Il existe une excursion indicée par t si et seulement si il existe un intervalle non-trivial sur lequel le temps local prend la valeur t, si et seulement si t est un instant de saut pour L^{-1}.

Notons alors e_t cette excursion, donnée par

$$e_t = (M_{L^{-1}(t^-)+s})_{0\leq s\leq L^{-1}(t)-L^{-1}(t^-)} \tag{1.3.2}$$

Pour tous les instants t de continuité de L^{-1}, qui ne correspondent à aucune excursion, notons encore $e_t = \emptyset$. Le résultat fondamental tient en une phrase :

Théorème (Itō)**.** *Le processus $(e_t, t \geq 0)$ est un processus ponctuel de Poisson.*

Nous noterons désormais $\mathbf{n}$ l’intensité de ce processus ponctuel de Poisson. Pour tout ensemble mesurable B inclus dans $\mathcal{E}$, la mesure $\mathbf{n}(B)$ est égale à

$$\mathbf{n}(B) = \mathbb{P}\left(Card\{e_t \in B, t \leq 1\}\right), \tag{1.3.3}$$

c'est-à-dire à l'espérance du nombre d'excursions du processus, incluses dans B, advenant avant le temps $L^{-1}(1)$.

La mesure $\mathbf{n}$ est une mesure infinie mais $\sigma-$finie. En particulier, la mesure $\mathbf{n}$ assigne une masse finie à l'ensemble des excursions ayant une durée de vie supérieure à un $\varepsilon > 0$ fixé, ou encore à l'ensemble des excursions qui atteignent le complémentaire de O, si O est un ouvert fixé contenant 0.

Observons que la mesure d'excursion possède une propriété de Markov : conditionnellement à $\{e(a) = x, a > \zeta\}$, la fin de l'excursion $(e(t+a))_{0\leq t\leq \zeta - a}$ est indépendante de $(e(t))_{0\leq t\leq a}$ et a même loi que le processus de Markov M partant de x et stoppé à son premier temps de retour en 0. On dit que la mesure $\mathbf{n}$ est compatible avec le semi-groupe du processus de Markov tué en son premier temps de retour en 0.

Maintenant, le processus est entièrement caractérisé par le processus de Poisson $(e_t)_{t\geq 0}$ et le processus L^{-1}. En effet, voici comment reconstruire la variable X_t à partir de ces deux processus. Notons $s = L(t)$ et observons que s est le premier instant où L^{-1} atteint le niveau t. Si s est un point de continuité de L^{-1}, alors on a $X_t = 0$. Sinon, c'est que l'on a $L^{-1}(s^-) \leq t \leq L^{-1}(s)$. Et il suffit de recoller l'excursion e_s entre ces instants $L^{-1}(s^-)$ et $L^{-1}(s)$ pour obtenir

$$X_t = e_s(t - L^{-1}(s^-)), \qquad \text{où } s = L(t). \tag{1.3.4}$$

Jusqu'ici, la description de la théorie des excursions d'Itō semble relativement agréable, si ce n'est qu'il faut être précautionneux avec les échelles de temps que l'on manipule : en plus du temps du processus intervient une nouvelle échelle de temps, l'inverse du temps local, dans laquelle il convient de compter les instants d'apparition des excursions. Pour terminer cette brève description de la théorie, il nous reste toutefois à étudier plus précisément le processus L^{-1}.

Lemme. *Le processus L^{-1} est un subordinateur, caractérisé par une mesure de sauts de Lévy égale à $\Pi(\mathrm{d}t) = \mathbf{n}(\zeta \in \mathrm{d}t)$ et un drift d positif ou nul.*

Remarquons qu'il s'ensuit que l'intégrale

$$\int (1 \wedge t)\mathbf{n}(\zeta \in \mathrm{d}t)$$

est finie. Par ailleurs, comme nous pouvions nous y attendre, la mesure de sauts de Lévy de L^{-1} est entièrement caractérisé par la mesure d'excursion $\mathbf{n}$. Mais L^{-1} possède également le drift d qui n'a aucune raison d'être nul. Le processus L^{-1} s'écrit alors

$$L^{-1}(t) = dt + \sum_{s\leq t} l(e_s). \tag{1.3.5}$$

Finalement, le processus M est entièrement caractérisé par le processus ponctuel de Poisson des excursions, d'intensité $\mathbf{n}$, et d.

Une question naturelle qui se pose alors est de savoir si, en choisissant bien notre processus de Markov, nous pouvons obtenir n'importe quelle mesure $\sigma-$finie $\mathbf{n}$ sur $\mathcal{E}$ et n'importe quel drift d. De manière équivalente, étant donnés $\mathbf{n}$ et d, pouvons-nous construire un processus de Markov admettant $\mathbf{n}$ comme mesure d'excursion, et d comme drift de l'inverse de son temps local.

Déjà, l'observation que $\mathbf{n}(\zeta \in \cdot)$ est une mesure de sauts de Lévy implique la finitude de $\int(1 \wedge t)\mathbf{n}(\zeta \in \mathrm{d}t)$. Par ailleurs, nous avons déjà indiqué que la mesure de l'ensemble des excursions ne restant pas dans un voisinage ouvert O de 0 est toujours fini. Enfin, la mesure $\mathbf{n}$ doit être compatible avec un semi-groupe d'un processus de Markov défini en dehors de 0 et tué en son premier temps de retour en 0. Ces trois conditions nécessaires sont suffisantes.

En effet, considérons $(e_t)_{t>0}$ un processus ponctuel de Poisson d'intensité $\mathbf{n}$, et notons

$$L^{-1}(t) := dt + \sum_{s \leq t} l(e_s).$$

La première condition implique que la somme des longueurs des excursions est presque sûrement finie, et que L^{-1} est donc bien défini, et est un subordinateur de drift d et de mesure de sauts $\mathbf{n}(\zeta \in \cdot)$. Nous construisons alors $(X_t)_{t\geq 0}$ comme indiqué ci-avant. La deuxième condition assure que le processus ainsi construit est continu à droite. La troisième assure qu'il est markovien. Il s'agit du programme d' Itō, revu par Salisbury.

Terminons cette partie par une remarque : le choix du temps local peut sembler arbitraire et important. Il est arbitraire, certes, mais pas vraiment important. Si on choisit un autre temps local, égal à k fois le temps local L, cela ne fera que changer la mesure d'excursion $\mathbf{n}$ en $k^{-1}\mathbf{n}$ (et le drift d en $k^{-1}d$). On s'intéresse généralement au temps local à un facteur multiplicatif près, à la mesure d'excursion à un facteur multiplicatif près. Notons toutefois que la valeur du drift, si elle est non-nulle, n'a de sens qu'attachée à une mesure d'excursion particulière.

1.3.3 Les $h-$transformées au sens de Doob

Le principe des $h-$transformées au sens de Doob permet de transformer la loi d'un processus de Markov en multipliant ses densités de transition à l'aide d'une fonction h harmonique ou bien surharmonique.

Je parle de principe car à ma connaissance la seule théorie sur les $h-$transformées – développée par Doob dans une *théorie probabiliste de la théorie du potentiel* dans [10] – concerne un cas particulier, celui du mouvement brownien, et non l'éventail des situations dans lesquelles on parle de $h-$transformée.

Ici nous nous contentons d'évoquer le principe, qui sera utilisé dans les 3 papiers (chapitres 2, 3 and 4)dans 3 situations bien différentes. Considérons un processus de Markov X càdlàg à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et $\mathbb{P}_x$ la loi du processus partant de x. Supposons que les lois de transition de ce processus peuvent s'écrire sous la forme

$$\mathbb{P}_x(X_t \in \mathrm{d}y) = p_t(x,y)\mathrm{d}y,$$

où dy est une “mesure de référence”. Une fonction continue positive h définie sur E est dite harmonique (ou invariante) si

$$\mathbb{P}_x(h(X_t)) = h(x) \tag{1.3.6}$$

pour tout $x \in E$, $t > 0$. Soit O l'ensemble (ouvert) des points où h ne s'annule pas. Si la trajectoire quitte O, alors, presque sûrement, la trajectoire ne retournera pas dans O. On définit alors un processus de Markov à valeurs dans O de loi $\widetilde{\mathbb{P}}$ par

$$\widetilde{\mathbb{P}}_x(\phi_t(X)) = \frac{1}{h(x)}\mathbb{P}_x\left(\phi_t(X)h(X_t)\right), \tag{1.3.7}$$

pour $x \in O$, $t > 0$ et ϕ_t fonctionnelle positive continue ne dépendant que de $(X_s)_{0\leq s\leq t}$. Le caractère harmonique de h assure qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité. De manière équivalente, on définit $\widetilde{\mathbb{P}}$ par ses lois de transition

$$\widetilde{\mathbb{P}}_x(X_t \in \mathrm{d}y) = \tilde{p}_t(x,y)\mathrm{d}y = \frac{h(y)}{h(x)}p_t(x,y)\mathrm{d}y.$$

La formule (1.3.7) montre que conditionnellement à la valeur de X_t (lorsque cela a un sens), les lois de $(X_s)_{0\leq s\leq t}$ sous $\mathbb{P}_x$ et $\widetilde{\mathbb{P}}_x$ coïncident. Sur un intervalle fixe, le processus $h-$transformé est donc en un certain sens un “processus conditionné à sa valeur finale”.

Jusque là j'ai décrit un cas particulier, où $\mathbb{P}$ et $\widetilde{\mathbb{P}}$ sont les lois de processus de Markov proprement définis. Ce principe reste valide *mutatis mutandis* pour des chaînes de Markov, ce que je ne détaille pas ici.

Mais surtout, nous pouvons considérer le cas où les processus sont des processus tués, en d'autres termes, le cas où les marginales $P(X_t \in \cdot)$ peuvent être des mesures de masse strictement inférieure à 1. Considérons que h n'est plus harmonique mais seulement surharmonique (ou excessive), dans le sens où

$$\mathbb{P}_x(h(X_t)) \leq h(x) \tag{1.3.8}$$

pour tout $x \in E$, $t > 0$, et

$$\lim_{t\to 0}\mathbb{P}_x(h(X_t)) = h(x) \tag{1.3.9}$$

pour tout $x \in E$. Alors on peut définir $\widetilde{\mathbb{P}}$ de la même manière, loi d'un processus de Markov tué.

Enfin, la loi $\mathbb{P}$ elle-même peut être celle d'un processus tué. Cela n'induit pas de changement dans la définition de $\widetilde{\mathbb{P}}$. Si h est harmonique, on obtient une loi $\widetilde{\mathbb{P}}$ d'un processus non-tué. Si h est seulement surharmonique, on obtient celle d'un processus tué.

En pratique, on peut souvent préciser la manière dont les processus sont tués, et interpréter de manière mieux adaptée le processus $h-$transformé comme processus conditionné.

Ainsi, dans le premier article (chapitre 2), la loi $\mathbb{P}$ est celle d'un processus $(X, \dot{X})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, tué lorsqu'il atteint la ligne $X = 0$. Pour chaque v, nous avons une fonction $h(x, u)$ qui est proportionnelle à la probabilité, depuis (x, u), d'atteindre la ligne $X = 0$ avec une vitesse dans $\mathrm{d}v$. Cette fonction est surharmonique. Le processus $h-$transformé construit s'interprète comme étant le processus conditionné à avoir une vitesse égale à v au moment où il touche la ligne $X = 0$ (qui est aussi le moment où il est tué).

Dans le deuxième article (chapitre 3), le processus considéré est une marche aléatoire (d'espérance nulle et de variance strictement positive) tuée lorsqu'elle atteint la demi-droite $]-\infty, 0]$. La fonction h considérée est connue sous le nom de "fonction de renouvellement", et le processus $h-$transformé peut s'interpréter comme étant la marche aléatoire conditionnée à toujours rester positive.

Enfin, dans le troisième article (chapitre 4), une $h-$transformée définit le processus de Langevin réfléchi conditionné à ne jamais revenir en 0 avec vitesse nulle.

1.4 Présentation des articles

Voici maintenant une présentation des trois articles que j'ai rédigés au cours de ma thèse. La motivation commune à ces articles est l'étude du processus de Langevin réfléchi sur une barrière, dont le rebond est caractérisé par un coefficient d'élasticité $c \geq 0$. Rappelons que le cas d'un rebond totalement inélastique, $c = 0$, a déjà été étudié par Bertoin. Plus précisément, Bertoin a formalisé la même problématique par deux points de vue distincts, d'une part le point de vue des excursions d'un processus de Markov dans [4], d'autre part le point de vue de la réflexion au second ordre, c'est-à-dire le point de vue des équations différentielles stochastiques, dans [5]. Dans les deux cas, il a montré qu'il définissait de manière unique la loi d'un processus, qu'il appelle processus de Langevin réfléchi sur une barrière totalement inélastique. C'est dans cette même veine que nous avons voulu continuer à nous intéresser aux processus de Langevin réfléchis, en particulier pour un coefficient d'élasticité c non nul, et en continuant à garder les deux points de vue.

Le premier article s'écarte légèrement de cet objectif puisqu'il consiste principalement en une étude des excursions du processus de Langevin vu comme processus stationnaire, avant d'utiliser cette étude pour investiguer un peu plus le processus de Langevin réfléchi sur une barrière inélastique et sa mesure d'excursion au sens d'Itō. Le deuxième article s'intéresse à un coefficient $c > 0$ et met en évidence l'existence d'un coefficient critique, au-dessus duquel le point $(0, 0)$ est transitoire pour le processus de Kolmogorov. Dans les cas critique et sur-critique, le seul problème est alors de partir de la condition initiale $(0, 0)$. L'article montre qu'il y a une unique loi de processus partant de $(0, 0)$, à la fois du point de vue des excursions et de celui des équations différentielles stochastiques. Le troisième article montre encore une fois l'existence et l'unicité, dans le cas sous-critique, plus délicat car l'ensemble des temps en lesquels la position et la vitesse sont nulles est alors un fermé aléatoire parfait.

1.4.1 Excursions de l'intégrale du mouvement brownien

Ce premier article contient une étude "générale" du processus de Langevin et de ses excursions, vu comme un processus stationnaire, ainsi que quelques applications au processus de Langevin réfléchi sur une barrière totalement inélastique.

Processus de Kolmogorov stationnaire

La première partie est une introduction détaillée aux processus de Kolmogorov et de Langevin stationnaires. Nous commençons en insistant sur deux propriétés, bien connues des spécialistes, du processus de Kolmogorov $(Y, \dot{Y})$. Il s'agit d'une part de l'invariance de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ (notons-la λ), et d'autre part d'une propriété de dualité avec le processus $(Y, -\dot{Y})$ ou $(-Y, \dot{Y})$. Ces propriétés nous permettent de construire une version stationnaire et autoduale du processus de Kolmogorov, dont nous noterons $\mathbb{P}_\lambda$ la loi.

Plus précisément, la mesure $\mathbb{P}_\lambda$ est une mesure $\sigma-$finie, "loi" d'un processus généralisé $(Y, \dot{Y})$, indicé par toute la droite réelle, et markovien, de probabilités de transition celles du processus de Kolmogorov. La marginale de $\mathbb{P}_\lambda$ à un temps fixé $t \in \mathbb{R}$, à savoir la mesure $\mathbb{P}_\lambda((Y_t, \dot{Y}_t) \in \cdot)$, n'est autre que la mesure de Lebesgue λ. Sous $\mathbb{P}_\lambda$, le processus $(Y_t, \dot{Y}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ a même loi que le processus $(Y_{s+t}, \dot{Y}_{s+t})_{t\in\mathbb{R}}$ (propriété de stationnarité, ou invariance par translation temporelle), ou encore que $(Y_{-t}, -\dot{Y}_{-t})_{t\in\mathbb{R}}$ (propriété d'autodualité, ou invariance par retournement du temps et conjugaison).

Nous appellerons donc processus de Kolmogorov stationnaire le processus $(Y, \dot{Y})$ sous $\mathbb{P}_\lambda$, ou processus de Langevin stationnaire le processus Y sous $\mathbb{P}_\lambda$.

Excursions verticales du processus de Kolmogorov stationnaire

Dans une deuxième partie, nous introduisons la mesure d'excursion stationnaire du processus de Langevin stationnaire en dehors de 0, au sens de Pitman (voir section 1.3.1). Notons Q_{ex} cette mesure, et introduisons encore $\mathbb{P}^\partial_{0,u}$ la loi du processus de Langevin tué au temps ζ, premier temps de retour en 0.

Théorème. *1) L'identité suivante est satisfaite :*

$$Q_{ex}(Y \in de) = \int_{u=-\infty}^{+\infty} |u| \mathbb{P}^\partial_{0,u}\big(Y \in de\big) du. \tag{1.4.1}$$

2) (retournement du temps). Notons $\widehat{Y}$ l'excursion retournée, définie par

$$\widehat{Y}_s = Y_{\zeta - s} \text{ pour } 0 \leq s \leq \zeta.$$

Les processus Y et $\widehat{Y}$ ont même loi sous Q_{ex}.

La première partie du théorème est une expression remarquablement simple de Q_{ex}. Nous la démontrons avec une preuve assez courte utilisant, pour l'excursion enjambant un temps déterministe, le résultat de décomposition au dernier instant de passage en 0 de Pitman, ainsi que celui de Lachal. Une démonstration plus auto-suffisante aurait été possible mais eut été notablement plus longue.

La deuxième partie du théorème exprime une propriété d'invariance par retournement du temps [5] (à la durée de vie de l'excursion) de la mesure Q_{ex}. Cette propriété, très naturelle dans la formulation de Pitman, est héritée automatiquement de $\mathbb{P}_\lambda$.

Par la suite nous écrivons une formule de désintégration de la mesure Q_{ex} en fonction des vitesses au début de l'excursion, $\dot{Y}_0$, et à la fin de l'excursion, $\dot{Y}_\zeta$. Cette formule s'exprime sous la forme

$$Q_{ex}(\cdot) = \int_{\mathbb{R}} Q_{u;v}(\cdot) \varphi(u, v) du dv, \tag{1.4.2}$$

où

$$\varphi(u, v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v := \frac{3}{2\pi} \frac{|u|^{\frac{3}{2}} |v|^{\frac{3}{2}}}{|u|^3 + |v|^3} \mathbb{1}_{uv>0} \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

5. Nous avons choisi de considérer que Q_{ex} est la loi du processus unidimensionnel Y, c'est pourquoi Q_{ex} est invariante par simple retournement du temps, et non par retournement du temps *et conjugaison*.

est la loi du couple $(\dot{Y}_0, -\dot{Y}_\zeta)$ sous Q_{ex}, et où $Q_{u;v}$ est donc une version de la loi conditionnelle de Q_{ex} sachant $\dot{Y}_0 = u$ et $\dot{Y}_{\zeta-} = -v$. Alternativement, pour presque tout u, $Q_{u;v}$ est une version de la loi conditionnelle de $\mathbb{P}^\partial_{0,u}$ sachant $-\dot{Y}_{\zeta-} = v$. De l'invariance par retournement du temps de Q_{ex}, il s'ensuit que la loi de l'excursion retournée à sa durée de vie sous $Q_{u;v}$ n'est autre que $Q_{v,u}$ (pour presque tout (u, v)).

Nous terminons cette partie en nous attachant à construire une version de $Q_{u;v}$ continue par rapport à (u, v) par un conditionnement au sens de Doob, au moyen d'une $h-$transformée. Plus précisément, nous commençons par étudier la loi de la variable $-\dot{Y}_\zeta$ sous $\mathbb{P}_{x,u}$, que l'on note $h_v(x, u)\mathrm{d}v$. Un lemme technique étudie la fonction $(v, x, u) \to h_v(x, u)$, en montrant qu'il s'agit d'une fonction continue et en étudiant son comportement au voisinage de $v = 0$, de la forme

$$h_v(x, u) \sim \overline{h_0}(x, u)|v|^{\frac{3}{2}}.$$

Alors, pour v fixé, la fonction $(x, u) \to h_v(x, u)$ est excessive pour le semi-groupe du processus de Kolmogorov tué à son premier temps de retour en $\{0\} \times \mathbb{R}$. La h_v-transformée, au sens de Doob, de $\mathbb{P}^\partial_{0,u}$, définit la loi d'un processus de Langevin partant de 0 avec vitesse u, tué à son premier temps de retour en 0 et conditionné à arriver en 0 avec vitesse $-v$. Il s'agit de la version continue des lois $Q_{u;v}$. Lorsque v tend vers 0, les lois $Q_{u;v}$ ont une limite faible, que l'on note $Q_{u;0}$, qui s'exprime comme la $\overline{h_0}-$transformée de $\mathbb{P}^\partial_{0,u}$, et que l'on interprète naturellement comme étant la loi du processus de Langevin partant de 0 avec vitesse u, tué en ζ, conditionné à revenir en 0 avec vitesse nulle.

Processus de Langevin réfléchi sur une barrière inélastique

Enfin, la troisième et dernière partie est une contribution à l'étude du processus de Langevin réfléchi sur une barrière totalement inélastique, qui utilisera les lois $Q_{u;v}$ introduites dans la partie précédente.

Tout d'abord, nous rappelons la définition de ce processus par Bertoin dans [4]. Il s'agit principalement d'une approche du processus via ses excursions. A savoir, un processus X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ est un processus de Langevin réfléchi sur une barrière totalement inélastique (abrégé en processus de Langevin réfléchi) si sa vitesse est ramenée à 0 dès qu'il se trouve en 0, qui reste un temps nul en 0, et tel que $(X, \dot{X})$ est un processus de Markov dont les excursions en dehors de $\{0\} \times \mathbb{R}$ sont compatibles avec P^∂_t, le semi-groupe du processus de Kolmogorov tué à son premier temps de retour en $\{0\} \times \mathbb{R}$. En d'autres termes, un processus X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ est un processus de Langevin réfléchi sur une barrière totalement inélastique si le processus $(X, \dot{X})$ est une extension récurrente du processus de Kolmogorov tué[6] en son premier temps de retour en 0, qui quitte $(0, 0)$ continûment.

Bertoin montre que cela caractérise de manière unique la loi du processus, et en propose une construction. Par ailleurs, il exprime la mesure d'excursion d'Itō du processus $\mathbf{n}$ sous la forme d'une limite des lois de probabilité $\mathbb{P}^\partial_{x,0}$ du processus de Langevin tué partant

6. tué, à comprendre dans le sens *ramené en* $(0, 0)$

de x avec vitesse nulle, renormalisées par le facteur multiplicatif $x^{-\frac{1}{6}}$. Notons F pour une fonctionnelle quelconque, continue et bornée sur l'espace des excursions, nulle au voisinage de l'excursion triviale. Le résultat de Bertoin est alors plus précisément que la limite

$$\mathbf{n}\big(F(X)\big) = \lim_{x \to 0+} x^{-\frac{1}{6}} \mathbb{P}^{\partial}_{x,0}\big(F(X)\big)$$

existe et caractérise de manière unique la mesure $\mathbf{n}$, mesure d'excursion d'Itō du processus de Langevin réfléchi sur une barrière totalement inélastique. Nous en fournissons une autre expression, similaire, sous la forme d'une limite des mesures de probabilité $\mathbb{P}^{\partial}_{0,u}$, renormalisées par $u^{-\frac{1}{2}}$.

Théorème. *La limite*

$$\mathbf{n}'\big(F(X)\big) = \lim_{u \to 0+} u^{-\frac{1}{2}} \mathbb{P}^{\partial}_{0,u}\big(F(X)\big)$$

existe et définit de manière unique la mesure $\mathbf{n}'$, mesure d'excursion d'Itō du processus de Langevin réfléchi. Les mesures $\mathbf{n}$ et $\mathbf{n}'$ sont donc proportionnelles. Plus précisément,

$$\mathbf{n}' = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\Big(\frac{1}{3}\Big) \mathbf{n}.$$

L'intérêt de cette nouvelle expression est qu'elle permet d'utiliser les résultats connus sur $\mathbb{P}_{0,u}$, et notamment de faire le lien avec les fonctions h_v et les lois $Q_{u,v}$ introduites dans la partie précédente.

En particulier, nous obtenons la loi jointe de la durée de vie de l'excursion ζ et de la vitesse à la fin de l'excursion $\dot{X}_{\zeta-}$, alors que Bertoin n'avait obtenu que les lois marginales de ces deux variables (à un facteur multiplicatif près). Par ailleurs, nous obtenons une mesure invariante pour le processus de Langevin réfléchi sur une barrière inélastique, à savoir $\overline{h}_0(x,-u)\mathbb{1}_{x \geq 0} \mathrm{d}x\mathrm{d}u$. Enfin, nous obtenons une expression alternative de la mesure d'excursion $\mathbf{n}$ impliquant un retournement du temps.

En effet, sous la mesure $\mathbf{n}$, l'excursion part de 0 avec vitesse nulle. Par contre elle revient en 0 avec une vitesse distribuée selon $|v^{-\frac{3}{2}}|\mathrm{d}v$. Il est alors naturel de se demander quelle description on pourrait obtenir des excursions retournées à leur durée de vie.

Proposition. *La mesure $\mathbf{n}'$ est encore donnée par*

$$\mathbf{n}'\big(F(X)\big) = \frac{3}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+} u^{-\frac{3}{2}} Q_{u;0}\big(F(\hat{X})\big) du,$$

Autrement dit, la mesure des excursions retournée est celle du processus généralisé partant de 0, avec vitesse distribuée selon la mesure

$$\frac{3}{2\pi} u^{-\frac{3}{2}} \mathrm{d}u,$$

et qui se comporte comme le processus de Langevin tué, conditionné à revenir en 0 avec vitesse nulle. Cette formule a l'avantage de ne pas faire intervenir de limite, mais l'inconvénient de faire intervenir les lois $Q_{u;0}$ plutôt que les lois plus simples $\mathbb{P}^{\partial}_{0,u}$.

1.4.2 Processus de Langevin réfléchi sur une barrière partiellement élastique I

Ce deuxième article commence donc l'étude du processus de Langevin réfléchi avec un rebond partiellement élastique, de coefficient d'élasticité $c > 0$. Comme nous l'avons déjà évoqué, nous allons nous intéresser à deux types de problème autour du point singulier $(0, 0)$, c'est-à-dire lorsque le processus se trouve en 0 avec vitesse nulle. Le premier problème sera de déterminer quand le processus atteint ce point $(0, 0)$, partant d'une condition initiale différente de $(0, 0)$. Le second sera de (re)partir de ce point $(0, 0)$. Le premier problème s'avérera être le plus simple, tandis que le second occupera la fin de cet article et tout l'article suivant.

Description des différents régimes

Nous considérons donc, pour l'instant, que la condition initiale n'est pas $(0, 0)$. La première observation est que la vitesse du processus ne peut pas être nulle à l'instant où celui-ci revient pour la première fois en 0, ou même après un nombre fini de rebonds (cet événement a probabilité nulle). Nous pouvons donc noter ζ_n pour le $n-$ième instant de rebond en 0, et $V_n = \dot{X}_{\zeta_n}$ pour la vitesse du processus en cet instant. Rappelons que $\dot{X}$ étant continu à droite, il s'agit donc de la vitesse juste après le rebond, qui est positive. Nous notons enfin ζ_∞ pour la limite de la suite croissante $(\zeta_n)_{n\geq 1}$, qui coïncide presque sûrement avec le temps d'atteinte de $(0, 0)$.

Nommons arche une portion de la trajectoire entre deux passages successifs en 0. Alors les propriétés de Markov et d'invariance par changement d'échelle du processus de Langevin montrent que la suite des arches, renormalisées de sorte qu'elles quittent 0 avec vitesse 1, est indépendante identiquement distribuée. En conséquence, la suite

$$\left(\frac{\zeta_{n+1} - \zeta_n}{V_n^2}, \frac{V_{n+1}}{V_n}\right)_{n\geq 0}$$

est i.i.d, et la loi commune de ces couples est explicite grâce à (1.2.3). Enfin, il s'ensuit que la suite $(\ln(V_n))_{n\geq 1}$ est une marche aléatoire donc nous connaissons la loi de saut. L'étude du processus va grandement reposer sur celle de cette marche aléatoire.

Si le coefficient d'élasticité c est supérieur à la valeur critique

$$c_{crit} = \exp(-\pi/\sqrt{3})$$

– on parle de régime surcritique – la marche aléatoire possède un drift positif. La particule rebondit avec des vitesses en moyenne de plus en plus grandes. Dans le régime critique $c = c_{crit}$, la loi de saut a une espérance nulle et une variance finie, et la marche aléatoire est donc récurrente. Le processus rebondit alternativement avec des vitesses très petites et très grandes. Dans ces deux cas il s'ensuit que le temps ζ_∞ est infini. Enfin, dans le régime sous-critique $c < c_{crit}$, la suite des vitesses $(V_n)_{n\geq 1}$ tend alors vers 0 exponentiellement vite. Dans ce cas, presque sûrement, les variables $\zeta_{n+1} - \zeta_n$ sont sommables, et ζ_∞ est alors fini.

Désormais, nous nous intéresserons dans cet article aux régimes surcritique et critique, tandis que le régime sous-critique sera étudié dans l'article suivant. Nous supposons donc $c \geq c_{crit}$.

Partir de 0 en régime critique et surcritique

Pour une condition initiale (x, u) différente de $(0, 0)$, rappelons que le processus de Langevin réfléchi avec coefficient c est bien défini sur $\mathbb{R}_+$, et notons $\mathbb{P}^c_{x,u}$ sa loi. Le problème restant est de partir de $(0, 0)$.

Notre résultat principal est que les lois $\mathbb{P}^c_{x,u}$ convergent faiblement, quand (x, u) tend vers $(0, 0)$, vers une loi limite $\mathbb{P}^c_{0+}$, qui est aussi l'unique loi d'une solution aux équations (SOR) avec condition initiale $(0, 0)$. Par un argument markovien, nous pouvons nous ramener au cas où la position initiale est nulle et montrer seulement la convergence des lois $\mathbb{P}^c_{0,u}$. Sous $\mathbb{P}^c_{0+}$, nous montrerons de plus que le processus rebondit une infinité de fois juste après le temps initial, et nous expliciterons la loi de $\dot{X}_{\tau_v}$, la vitesse du processus à l'instant $\tau_v := \inf\{t > 0, X_t = 0, \dot{X}_t > v\}$, instant de son premier rebond avec vitesse supérieure à v.

Tout d'abord, observons que sous $\mathbb{P}^c_{0,u}$, la suite $(S_n := \ln(V_n))_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire partant de $\ln(u)$. Lorsque u tend vers 0, son logarithme tend donc vers $-\infty$. Pour un niveau fixé $x \in \mathbb{R}$, on note T_x le premier instant où la suite dépasse le niveau x. Le dépassement ou reste de vie au-dessus du niveau x est alors défini par $S_{T_x} - x$. La théorie du renouvellement pour des marches aléatoires réelles nous apprend que le dépassement au-dessus du niveau x tend vers m, la *loi de dépassement stationnaire.*

Théorème. *1) La famille de lois de probabilité* $(\mathbb{P}^c_{x,u})_{(x,u)\in D}$ *a une limite faible quand* (x, u) *tend vers* $(0, 0)$*. Nous notons cette limite* $\mathbb{P}^c_{0+}$*.*
2) Sous la loi $\mathbb{P}^c_{0+}$*, le processus* $(X, \dot{X})$ *vérifie les conditions suivantes :*

$$\begin{cases} \text{La variable aléatoire } \ln(\dot{X}_{\tau_u}/u) \text{ suit la loi } m. \\ \lim\limits_{u\to 0^+} \tau_u = 0 \quad \text{presque sûrement.} \\ \text{Conditionnellement à } \dot{X}_{\tau_u} = v, \text{ le processus } (\dot{X}_{\tau_u+t})_{t\geq 0} \text{ est indépendant de } (\dot{X}_s)_{s<\tau_u} \\ \quad \text{et de loi } \mathbb{P}^c_{0,v}. \end{cases}$$

3) Le processus canonique X *sous* $\mathbb{P}^c_{0+}$ *est solution des équations* (SOR) *avec condition initiale* $(0, 0)$*, et toute solution a cette même loi.*

L'idée générale est d'utiliser la théorie du renouvellement pour établir la convergence en loi de la suite des arches convenablement translatées sous $\mathbb{P}^c_{0,u}$ lorsque $u \to 0+$. Il restera alors à établir que la convergence des suites translatées entraîne bien la convergence des lois $\mathbb{P}^c_{0,u}$ elles-mêmes.

Un premier résultat de convergence

Maintenant commence une partie un peu plus technique. A la suite S nous attachons une deuxième coordonnée, une suite $(\mathcal{N}_n)_{n\geq 0}$ de trajectoires. A savoir, la trajectoire $\mathcal{N}_n$

est celle du processus à partir du $n-$ième rebond, renormalisée de sorte à commencer avec vitesse 1. Ainsi, pour tout n le processus $\mathcal{N}_n$ suit la même loi $\mathbb{P}^c_{0,1}$. Par ailleurs, nous prolongeons $(S, \mathcal{N})$ à $\mathbb{Z}$ en posant, pour $n < 0$, $S_n = -\infty$ et $\mathcal{N}_n = \emptyset$, où $\emptyset$ est un point isolé.

Nous introduisons alors un opérateur de *translation spatiale* Θ, défini sur l'espace des suites définies sur $\mathbb{Z}$, à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, qui tendent vers $-\infty$ en $-\infty$ et dont la limite supérieure en $+\infty$ est $+\infty$. L'opérateur Θ_x translate le temps de $-T_x$ (où T_x est toujours le premier instant où la suite dépasse le niveau x) et l'espace de $-x$. Nous avons donc

$$\Theta_x(S) = (S_{n+T_x} - x)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

L'opérateur s'étend également aux suites $(S, \mathcal{N})$ en posant

$$\Theta_x(S, \mathcal{N}) = (S_{n+T_x} - x, \mathcal{N}_{n+T_x})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Il en découle une notion de stationarité spatiale : la loi de $(S, \mathcal{N})$ (resp. la loi de S) sera dite spatialement stationnaire si pour tout x elle est égale à la loi de $\Theta_x(S, \mathcal{N})$ (resp. à la loi de $\Theta_x(S)$). Enfin, pour $(S, \mathcal{N})_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite donnée, on note $(S, \mathcal{N})^+$ la suite projetée sur les suites indicées par $\mathbb{N}$, à savoir $(S_n, \mathcal{N}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Maintenant, le résultat de la théorie du renouvellement peut se réinterpréter comme ceci : pour tout $x \in \mathbb{R}$, la loi de la suite $(\Theta_x(S, \mathcal{N}))^+$ sous $\mathbb{P}^c_{0,u}$ converge quand $u \to 0+$ (faiblement et au sens des probabilités fini-dimensionnelles) vers la même loi $\mathbf{Q}$. Sous $\mathbf{Q}$, la variable S_0 suit la loi m et le processus $\mathcal{N}_0$ la loi $\mathbb{P}^c_{0,1}$, ce qui suffit à déterminer $\mathbf{Q}$.

Un lemme *ad hoc*[7] nous donne alors directement la proposition suivante :

Proposition. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\Theta_x(S, \mathcal{N})$ sous $\mathbb{P}^c_{0,u}$ converge faiblement quand $u \to 0+$, au sens des probabilités fini-dimensionnelles, vers la loi $\mathbf{P}$, unique loi spatialement stationnaire sous laquelle la loi de $(S, \mathcal{N})^+$ est $\mathbf{Q}$.*

Par ailleurs, si on note $\mathbf{P}^1$ la loi de la première marginale de $\mathbf{P}$ (donc la loi de S sous $\mathbf{P}$), et $\mathbf{Q}^1$ celle de $\mathbf{Q}$, alors $\mathbf{P}^1$ est l'unique loi spatialement stationnaire sous laquelle la loi de S^+ est $\mathbf{Q}^1$, à savoir la loi d'une marche aléatoire dont la valeur initiale S_0 est distribuée selon m. La loi $\mathbf{P}^1$ est donc la loi d'une "marche aléatoire" partant de $-\infty$. Nous l'appelons *marche aléatoire spatialement stationnaire.*

Reconstruction du processus

Nous avons vu comment construire, à partir du processus $(X, \dot{X})$, la suite $\Theta_x(S, \mathcal{N})$; l'étape suivante consiste à faire le chemin inverse. Pour cela, nous notons α_x l'instant du premier rebond avec vitesse supérieure à $\exp(x)$ pour le processus X. Il s'exprime encore comme la somme des longueurs des arches avant la première arche dont la vitesse initiale est supérieure à $\exp(x)$. Or la longueur de la $n-$ième arche s'exprime facilement en fonction

7. Ce lemme, écrit dans un cadre théorique plus abstrait que le reste de l'article, est introduit plus tôt. Sa démonstration est donnée en appendice de l'article. Elle repose essentiellement sur le théorème de compatibilité de Kolmogorov qui permet de construire la loi $\mathbf{P}$

de $(S_{n-1}, \mathcal{N}_{n-1})$ et est égale à $e^{2S_{n-1}}\zeta_1(\mathcal{N}_{n-1})$. En conséquence, le terme α_x peut encore s'exprimer en fonction de $(S', \mathcal{N}') = \Theta_x(S, \mathcal{N})$ par

$$\alpha_x = e^{2x} \sum_{n<0} e^{2S'_n}\zeta_1(\mathcal{N}'_n).$$

Maintenant, le couple $(S'_0, \mathcal{N}'_0) = (S_{T_x} - x, \mathcal{N}_{T_x})$ nous donne toute la trajectoire du processus translaté au temps α_x. Il suffit en effet d'effectuer le changement d'échelle inverse de celui effectué pour construire $\mathcal{N}$. De manière précise, nous pouvons par exemple exprimer le processus $\dot{X}$ sur l'intervalle $[\alpha_x, +\infty[$ sous la forme :

$$\dot{X}_t = e^{S_{T_x}}\mathcal{N}_{T_x}(e^{-2S_{T_x}}(t-\alpha_x)), \qquad t \geq \alpha_x. \tag{1.4.3}$$

Maintenant, il va s'agir de montrer que la loi de $(\alpha_x, S_{T_x}, \mathcal{N}_{T_x})$ sous $\mathbb{P}^c_{0,u}$ converge vers la loi de $(\alpha_x, S_{T_x}, \mathcal{N}_{T_x})$ sous $\mathbf{P}$, et que le temps α_x est fini $\mathbf{P}-$presque sûrement. Alors la formule (1.4.3) reconstruira, sous $\mathbf{P}$, un processus $(X_t, \dot{X}_t)_{t>0}$, dont nous noterons $\mathbb{P}^c_{0+}$ la loi. Il ne sera alors pas très difficile de prolonger le processus en 0 (en posant $X_0 = \dot{X}_0 = 0$), d'obtenir la convergence faible de $\mathbb{P}^c_{0,u}$ vers $\mathbb{P}^c_{0+}$, et de vérifier que $\mathbb{P}^c_{0+}$ est la seule et unique loi d'une solution aux équations différentielles stochastiques (SOR) avec condition initiale $(0, 0)$.

La preuve que la loi de $(\alpha_x, S_{T_x}, \mathcal{N}_{T_x})$ sous $\mathbb{P}^c_{0,u}$ converge vers celle sous $\mathbf{P}$ est avant tout technique. La preuve que le temps α_x est fini $\mathbf{P}-$presque sûrement repose quant à elle sur une meilleure compréhension de la marche aléatoire spatialement stationnaire, et en particulier son comportement en $-\infty$. Nous en proposons donc une courte étude, qui diffère selon que l'on se trouve dans le régime surcritique ou dans le régime critique.

La marche aléatoire spatialement stationnaire surcritique

En régime surcritique la marche aléatoire S possède un drift strictement positif. Nous proposons une construction simple de la marche aléatoire spatialement stationnaire associée à une marche aléatoire quelconque de drift strictement positif. Cette construction est donc relativement indépendante du reste de notre étude, et revêt un intérêt propre.

Tout d'abord, l'observation que la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ est invariante pour la marche aléatoire permet de construire une marche aléatoire temporellement stationnaire P_λ, dans la même veine que la construction du processus de Kolmogorov stationnaire introduit dans le premier article. Plus précisément, P_λ est une mesure $\sigma-$finie temporellement stationnaire d'un processus $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}}$; les marginales unidimensionnelles de P_λ sont toutes égales à λ, et sous P_λ, le processus $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est markovien de probabilités de transition celles de la marche aléatoire.

Notons encore T_0 le premier instant dans $\mathbb{Z}$ où la marche aléatoire dépasse le niveau 0. Étant donné que le drift de la marche aléatoire est strictement positif, on montre que la $P_\lambda-$mesure de l'événement $\{T_0 = 0\}$ est strictement positive et finie. Cette observation permet alors de considérer la mesure P_λ conditionnée à cet événement et de définir ainsi une mesure de probabilité. La mesure de probabilité ainsi construite est spatialement stationnaire, elle n'est autre que la loi de la marche aléatoire spatialement stationnaire, $\mathbf{P}^1$.

Sous P_λ et conditionnellement à la valeur de S_0, la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire partant de S_0, et la suite $(-S_{-n})_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire indépendante (de même loi de saut) partant de la position $-S_0$. Après conditionnement par l'événement $\{T_0 = 0\}$, nous obtenons la description suivante de la marche aléatoire spatialement stationnaire : sous $\mathbf{P}^1$, conditionnellement à la valeur de S_0 (qui suit la loi m), la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire partant de S_0, et la suite $(-S_{-n})_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire indépendante partant de $-S_0$ et *conditionnée à rester strictement positive aux instants strictement positifs.*

Pour notre part, nous sommes intéressés par le comportement asymptotique de la marche aléatoire spatialement stationnaire en $-\infty$. Cette description montre que ce comportement est essentiellement le même que pour celui d'une marche aléatoire, à savoir linéaire (le conditionnement à "rester positif", conditionnement sur un événement de probabilité strictement positive, ne modifie pas foncièrement le comportement de la marche). De manière non formelle, si la suite des vitesses des rebonds ayant lieu avant le premier rebond avec vitesse supérieure à 1 tend exponentiellement vite vers 0. En conséquence, les arches correspondantes sont petites et la série de leurs durées est sommable, ainsi le temps α_0 est fini sous $\mathbf{P}$. Ceci conclut notre travail pour le régime surcritique.

La marche aléatoire spatialement stationnaire critique

Pour le régime critique, la marche aléatoire en jeu a une loi de saut d'espérance nulle (donc de drift nul) et de variance finie. La construction de la marche aléatoire spatialement stationnaire présentée ci-avant n'est alors plus valable. En effet, en notant encore P_λ la marche aléatoire temporellement stationnaire, la $P_\lambda-$mesure de l'événement $\{T_0 = 0\}$ est maintenant nulle, ceci étant une conséquence de la récurrence de la marche aléatoire. Le conditionnement est donc impropre.

Par ailleurs, pour la marche aléatoire, le conditionnement à *rester (strictement) positif aux instants strictement positifs* devient lui aussi un conditionnement impropre. Cependant il est connu (voir [6]) que l'on peut encore définir la marche aléatoire *conditionnée à rester positive* au moyen d'une $h-$transformée au sens de Doob. La fonction harmonique h utilisée (harmonique pour la marche aléatoire stoppée à son premier temps d'atteinte de $]-\infty, 0]$) est la fonction de renouvellement du processus des hauteurs d'échelle dual.

Alors, en utilisant cette définition de la marche aléatoire conditionnée à rester positive, la description de la marche aléatoire spatialement stationnaire donnée dans le cas surcritique reste valide. En particulier, sous $\mathbf{P}^1$, conditionnellement à la valeur de S_{-1}, la suite $(-S_{-n-1})_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire conditionnée à rester positive.

Maintenant, une étude des marches aléatoires conditionnées à rester positives (voir [19]) décrit son comportement en $+\infty$, lequel est essentiellement de l'ordre de $n^{1/2}$. En conséquence, S_{-n} tend vers $-\infty$ à la vitesse de $n^{1/2}$, certes moins rapide que la vitesse linéaire dans le régime surcritique, mais qui reste suffisante pour prouver la sommabilité de la durée des arches, et donc la finitude de α_0. Cela conclut l'étude du régime critique.

Mise à part cette différence de vitesse, il est notable que le régime critique a un comportement relativement proche du régime surcritique, dans le sens où le processus ne revient jamais en $(0,0)$. Pour le régime sous-critique, le point $(0,0)$ sera au contraire récurrent, le comportement du processus, et donc son étude, seront donc foncièrement différents.

1.4.3 Processus de Langevin réfléchi sur une barrière partiellement élastique II

Ce troisième article continue l'étude du processus de Langevin réfléchi sur une barrière partiellement élastique, par le régime sous-critique, caractérisé par un coefficient d'élasticité (non nul) $c < c_{crit} = \exp(-\pi/\sqrt{3})$. Partant d'une condition initiale $(X_0, \dot{X}_0) = (x,u) \neq (0,0)$ le processus réfléchi atteint $(0,0)$ au temps presque sûrement fini ζ_∞. Nous écrivons alors $\mathbb{P}^c_{x,u}$ la loi du processus de Langevin réfléchi, tué au temps ζ_∞. Nous cherchons donc à savoir comment partir – ou repartir – de $(0,0)$. Nous allons montrer que la famille de lois $(\mathbb{P}^c_{x,u})$ possède une unique extension récurrente $\mathbb{P}^r_0$ quittant $(0,0)$ continûment. Nous montrerons alors que $\mathbb{P}^r_0$ est l'unique loi d'une solution aux équations (SOR) avec condition initiale $(0,0)$.

La queue du temps d'atteinte de $(0,0)$

En préliminaire, nous aurons besoin de quelques résultats supplémentaires sur $\mathbb{P}^c_{0,1}$ et sur ζ_∞. Nous commençons en indiquant que la transformée de Mellin de V_1 est donnée par

$$\mathbb{P}^c_1\left(V_1^x\right) = \frac{c^x}{2\cos(\frac{x+1}{3}\pi)}$$

pour $x < 1/2$, et est infinie pour $x \geq 1/2$. L'équation

$$\mathbb{P}^c_1\left(V_1^{2k}\right) = 1$$

définit alors un unique $k = k(c)$ dans $]0, 1/4[$. Notons que la fonction $c \to k(c)$ est strictement décroissante, et tend vers $1/4$ quand c tend vers 0, vers 0 quand c tend vers c_{crit}.

L'introduction de ce k est primordiale dans notre étude. Comme première illustration de son importance, il décrit la queue du temps d'atteinte de $(0,0)$:

Lemme. *La queue de la variable ζ_∞ est donnée par*

$$\mathbb{P}^c_1(\zeta_\infty > t) \sim C_1 t^{-k},$$

où $C_1(c) \in (0,\infty)$ est une constante ne dépendant que de c.

Ce lemme est une conséquence d'une "théorie du renouvellement implicite" développée par Goldie dans [14].

Processus conditionné à ne jamais atteindre $(0,0)$

Nous commençons par introduire et étudier le processsus de Langevin réfléchi *conditionné à ne jamais atteindre* $(0,0)$. Nous allons en effet en avoir besoin pour étudier le processus réfléchi partant de $(0,0)$. Introduisons tout d'abord la fonction

$$H(x,u) = \mathbb{P}^c_{x,u}(V_1^{2k}).$$

Cette fonction est harmonique pour le semi-groupe du processus de Langevin réfléchi tué au temps ζ_∞. Notons alors $\widetilde{\mathbb{P}}_{x,u}$ la $h-$transformée de $\mathbb{P}^c_{x,u}$ par H, au sens de Doob. Nous avons donc, pour tout temps d'arrêt T et tout A événement $\mathcal{F}_t-$mesurable,

$$\widetilde{\mathbb{P}}_{x,u}(A) = \frac{1}{H(x,u)}\mathbb{P}^c_{x,u}(AH(X_T,\dot{X}_T), T<\zeta_\infty).$$

Nous appelons $\widetilde{\mathbb{P}}_{x,u}$ loi du processus de Langevin réfléchi conditionné à ne jamais atteindre $(0,0)$. Cette terminologie est justifiée par la proposition

Proposition. *Pour $t>0$, nous avons, pour tout A événement $\mathcal{F}_t-$mesurable,*

$$\widetilde{\mathbb{P}}_{x,u}(A) = \lim_{s\to\infty} \mathbb{P}^c_{x,u}(A|\zeta_\infty > s).$$

Notons que $\widetilde{\mathbb{P}}_{x,u}$ est la loi d'un processus de Markov indexé par $\mathbb{R}_+$ (non tué).

Regardons par ailleurs l'effet de ce changement de probabilité sur la suite $(S_n)_{n\geq 0} = (\ln(V_n))_{n\geq 0}$. Rappelons que sous $\mathbb{P}^c_{0,1}$, (S_n) est une marche aléatoire partant de 0 et dérivant vers $-\infty$. La loi de (S_n) sous $\widetilde{\mathbb{P}}_{0,1}$ est alors donnée par

$$\widetilde{\mathbb{P}}_{0,1}(S_n \in \mathrm{d}t) = e^{2kt}\mathbb{P}^c_{0,1}(S_n\in \mathrm{d}t).$$

La suite $(\exp(2kS_n))$ est une martingale, et la suite (S_n) sous $\widetilde{\mathbb{P}}_{0,1}$ est encore une marche aléatoire, dérivant vers $+\infty$, et que l'on peut interpréter comme étant la marche aléatoire initiale conditionnée à atteindre des niveaux arbitrairement hauts. Nous l'appelons marche aléatoire tiltée.

Partir de $(0,0)$ **pour le processus conditionné**

Ainsi, sous $\widetilde{\mathbb{P}}_{0,1}$, la suite des logarithmes des vitesses aux instants de rebond, (S_n), est une marche aléatoire dérivant vers $+\infty$. Cela n'est pas sans nous rappeler le comportement de la suite (S_n) sous $\mathbb{P}^c_{0,1}$ en régime surcritique. L'analogie entre les lois $\widetilde{\mathbb{P}}_{x,u}$ en régime sous-critique et $\mathbb{P}^c_{x,u}$ en régime surcritique n'est pas anodine. Modulo quelques modifications, principalement dues au fait que (même avant le premier rebond) les lois de transition du processus markovien $\widetilde{\mathbb{P}}_{x,u}$ ne sont plus celles d'un processus de Kolmogorov, l'étude du régime surcritique se transcrit sans problème. Rappelons la notation τ_u pour l'instant du premier rebond avec vitesse supérieure à u, et introduisons $\widetilde{m}$ la loi de dépassement stationnaire de la marche aléatoire tiltée.

Théorème. *1) La famille de lois de probabilité* $(\widetilde{\mathbb{P}}_{x,u})_{(x,u)\in D}$ *a une limite faible quand* (x,u) *tend vers* $(0,0)$. *Nous notons cette limite* $\widetilde{\mathbb{P}}_{0^+}$.
2) Sous la loi $\widetilde{\mathbb{P}}_{0^+}$, *le process* $(X,\dot{X})$ *vérifie les conditions suivantes :*

$$\begin{cases} \text{La variable aléatoire } \ln(\dot{X}_{\tau_u}/u) \text{ suit la loi } \widetilde{m}. \\ \lim\limits_{u\to 0^+} \tau_u = 0 \quad \text{presque sûrement.} \\ \text{Conditionnellement à } \dot{X}_{\tau_u} = v, \text{ le processus } (\dot{X}_{\tau_u+t})_{t\geq 0} \text{ est indépendant de } (\dot{X}_s)_{s<\tau_u}, \\ \ \text{et de loi } \widetilde{\mathbb{P}}_{0,v} \end{cases}$$

Processus de Langevin ressuscité

Nous cherchons maintenant les extensions récurrentes du processus de Kolmogorov tué au temps ζ_∞ qui quittent $(0,0)$ continûment. Nous appellerons une telle extension un processus de Kolmogorov réfléchi ressuscité.

Notons P_t^c le semi-groupe du processus de Kolmogorov tué au temps ζ_∞. Une extension récurrente est alors entièrement déterminée par la mesure d'Itō du processus en dehors de $(0,0)$, notée $\mathbf{n}$, qui doit être compatible avec le semi-groupe P_t^c et vérifier $\mathbf{n}((X_0,\dot{X}_0)\neq(0,0))=0$. Les résultats principaux sont compris dans les théorèmes ci-dessous.

Théorème. *Il existe une mesure d'excursion* $\mathbf{n}$, *unique à un facteur multiplicatif près, compatible avec le semi-groupe* P_t^c *et vérifiant* $\mathbf{n}((X_0,\dot{X}_0)\neq(0,0))=0$. *La mesure* $\mathbf{n}$ *est déterminée par l'une ou l'autre de ces formules :*

$$\mathbf{n}(f(X,\dot{X}),\zeta_\infty>T)=\widetilde{\mathbb{P}}_{0^+}(f(X,\dot{X})H(X_T,\dot{X}_T)^{-1}), \tag{1.4.4}$$

pour tout $\mathcal{F}_t-$*temps d'arrêt* T *et toute fonctionnelle mesurable positive* f *ne dépendant que de* $(X_t,\dot{X}_t)_{0\leq t\leq T}$.

$$\mathbf{n}(f(X,\dot{X}),\zeta_\infty>T)=\lim_{(x,u)\to(0,0)} H(x,u)^{-1}\mathbb{P}^c_{x,u}(f(X,\dot{X}),\zeta_\infty>T), \tag{1.4.5}$$

pour tout $\mathcal{F}_t-$*temps d'arrêt* T *et toute fonctionnelle* continue *positive* f *ne dépendant que de* $(X_t,\dot{X}_t)_{0\leq t\leq T}$.

Il existe donc un unique processus de Langevin ressuscité. Nous écrivons $\mathbb{P}_0^r$ sa loi.

Théorème. *La loi* $\mathbb{P}_0^r$ *est l'unique solution aux équations* (SOR) *avec condition initiale* $(0,0)$.

• *Considérons* $(X,\dot{X})$ *un processus de loi* $\mathbb{P}_0^r$. *Alors les sauts de* $\dot{X}$ *sont presque sûrement sommables sur tout intervalle fini, et le processus* W *défini par*

$$W_t=\dot{X}_t+(1+c)\sum_{0<s\leq t}\dot{X}_s \mathbb{1}_{X_s=0}$$

est un mouvement brownien . En conséquence le triplet $(X,\dot{X},W)$ *est solution des équations* (SOR).

• *Pour toute solution* $(X,\dot{X},W)$ *aux équations* (SOR), *la loi de* $(X,\dot{X})$ *est* $\mathbb{P}_0^r$.

Comme application de ces résultats, nous donnons la queue de la variable ζ_∞ sous $\mathbf{n}$ sous la forme

$$\mathbf{n}(\zeta_\infty > s) \propto s^{-k},$$

et en déduisons la mesure exacte de Hausdorff de l'ensemble des zéros du processus de Langevin ressuscité. L'article se termine par une démonstration de ces deux théorèmes, en une dizaine de pages.

Construction du processus

Mais contentons-nous de décrire et de commenter la construction de la mesure $\mathbf{n}$. Notons $\tilde{P}_t$ le semi-groupe du processus de Langevin conditionné à ne pas atteindre $(0,0)$. Comme nous l'avons indiqué, la fonction H est harmonique pour P^c_t et la $h-$transformée correspondante est $\tilde{\mathrm{P}}_t$. En conséquence, la fonction $1/H$ est surharmonique pour $\tilde{\mathrm{P}}_t$ et la $h-$transformée correspondante est P^c_t. Ainsi, la formule (1.4.4) construit la mesure $\mathbf{n}$ comme une $h-$tranformée de la loi $\mathbb{P}^r_0$ par la fonction $1/H$ (en un sens généralisé), mesure qui est automatiquement compatible avec le semi-groupe P^c_t. Pour montrer qu'il s'agit bien d'une mesure d'excursion d'Itō, il reste à montrer la finitude de $\int(1 \wedge t)\mathbf{n}(\mathrm{d}t)$. Or nous calculons explicitement $\mathbf{n}(\zeta_\infty > s) \propto s^{-k}$, et le résultat en découle.

En résumé, pour décrire la loi du processus partant de $(0,0)$, nous avons d'abord défini $\widetilde{\mathbb{P}}_{x,u}$, i.e le processus conditionné à ne jamais revenir en $(0,0)$, via une $h-$transformée par la fonction H. Nous avons alors considéré $\widetilde{\mathbb{P}}_{0+}$ sa limite quand (x,u) tend vers 0, puis nous en avons pris une $h-$transformée par la fonction $1/H$.
Cette démarche est très largement inspirée d'une étude des extensions récurrentes d'un processus de Markov auto-similaire, proposée par Rivero (voir [35]).

Par ailleurs, les formules (1.4.4) et (1.4.5) peuvent être vues comme des analogues de formules connues pour le mouvement brownien. Plus précisément, si l'on note $\widetilde{\mathbb{P}}_0$ la loi d'un processus de Bessel 3 partant de 0, $\mathbb{P}_x$ la loi d'un mouvement brownien partant de x, et ζ et le temps de retour en 0, la mesure d'excursion d'Itō du mouvement brownien réfléchi (au premier ordre) en 0 est donnée par

$$\mathbf{n}(f(X), \zeta > T) = \widetilde{\mathbb{P}}_0(f(X)/X_T),$$

pour tout $\mathcal{F}_t-$temps d'arrêt T et toute fonctionnelle mesurable positive f ne dépendant que de $(X_t, \dot{X}_t)_{0\le t\le T}$, ou encore

$$\mathbf{n}(f(X), \zeta > T) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\mathbb{P}_x(f(X), \zeta > T),$$

si f est continue.

Enfin, remarquons qu'en faisant tendre (x,u) vers 0 le long de la demi-droite $x = 0$, nous obtenons

$$\mathbf{n}(f(X,\dot{X}), \zeta_\infty > T) = \lim_{u\to 0} u^{-2k}\mathbb{P}^c_{0,u}(f(X,\dot{X}), \zeta_\infty > T).$$

Ce résultat semble concorder avec le régime totalement inélastique $c = 0$. En effet, lorsque c tend vers 0, la mesure $u^{-2k}\mathbb{P}^c_{0,u}$ converge vers $u^{-1/2}\mathbb{P}^\partial_{0,u}$, laquelle à son tour tend vers la mesure d'excursion d'Itō du processus de Langevin réfléchi sur une barrière totalement inélastique.

Chapter 2

Excursions of the integral of Brownian motion

Abstract

The integrated Brownian motion is sometimes known as the Langevin process. Lachal studied several excursion laws induced by the latter. Here we follow a different point of view developed by Pitman for general stationary processes. We first construct a stationary Langevin process and then determine explicitly its stationary excursion measure. This is then used to provide new descriptions of Itō's excursion measure of the Langevin process reflected at a completely inelastic boundary, which has been introduced recently by Bertoin.

Résumé

L'intégrale du mouvement brownien est parfois appelée processus de Langevin. Lachal a étudié plusieurs lois d'excursions qui lui sont associées. Nous suivons ici un point de vue différent, développé par Pitman, pour les processus stationnaires. Nous construisons d'abord un processus de Langevin stationnaire avant d'en déterminer explicitement la mesure d'excursion stationnaire. Ce travail permet alors de fournir une nouvelle description de la mesure d'excursion d'Itō du processus de Langevin réfléchi sur une barrière inélastique, introduit récemment par Bertoin.

2.1 Introduction

The Langevin process in a non-viscous fluid is simply defined as the integrated Brownian motion, that is:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \dot{Y}_s ds,$$

where $\dot{Y}$ is a Brownian motion started an arbitrary $v \in \mathbb{R}$ (so v is the initial velocity of Y). The Langevin process is not Markovian, but the pair $Z = (Y, \dot{Y})$, which is sometimes known as the Kolmogorov process, enjoys the Markovian property. We refer to Lachal [26] for a rich source of information on this subject.

Lachal [26] has studied in depth both the "vertical" and "horizontal" excursions of the Brownian integral. The purpose of this work is to follow a different (though clearly related) point of view, which has been developed in a very general setting by Pitman [33]. Specifically, we start from the basic observation that the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^2$ is invariant for the Kolmogorov process, so one can work with a stationary version of the latter. The set of times at which the stationary Kolmogorov process visits $\{0\} \times \mathbb{R}$ forms a random homogeneous set in the sense of Pitman, and we are interested in the excursion measure Q_{ex} that arises naturally in this setting. We shall show that Q_{ex} has a remarkably simple description and fulfills a useful invariance property under time-reversal. We then study the law of the excursions of the Langevin process away from 0 conditionally on its initial and final velocity, in the framework of Doob's h-transform. Finally, we apply our results to investigate the Langevin process reflected at a completely inelastic boundary, an intriguing process which has been studied recently by Bertoin [4, 5]. In particular we obtain new expressions for the Itō measure of its excursions away from 0.

2.2 Preliminaries

In this section we introduce some general or intuitive notations and recall some known results that we will use later on. We write Y for the Langevin process, $\dot{Y}$ for its derivative, and Z for the Kolmogorov process $(Y, \dot{Y})$, which, unlike Y, is Markovian.

The law of the Kolmogorov process with initial condition (x, u) will be written $\mathbb{P}^+_{x,u}$, and the expectation under this measure $\mathbb{E}^+_{x,u}$. Here, the exponent $+$ refers to the fact that the time parameter t is nonnegative. We denote by $p_t(x, u; dy, dv)$ the probability transitions of Z, and by $p_t(x, u; y, v)$ their density. For $x, u, y, v \in \mathbb{R}$, we have:

$$p_t(x, u; y, v)dydv := p_t(x, u; dy, dv) := \mathbb{P}^+_{x,u}(Z_t \in dydv).$$

These densities are known explicitly and given by:

$$p_t(x, u; y, v) = \frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} \exp\Big[-\frac{6}{t^3}(y - x - tu)^2 + \frac{6}{t^2}(y - x - tu)(v - u) - \frac{2}{t}(v - u)^2 \Big]. \quad (2.2.1)$$

One can check from the formula that the following identities are satisfied:

$$p_t(x,u;y,v) = p_t(0,0;y-x-ut,v-u), \tag{2.2.2}$$
$$p_t(x,u;y,v) = p_t(-x,-u;-y,-v), \tag{2.2.3}$$
$$p_t(x,u;y,v) = p_t(x,v;y,u). \tag{2.2.4}$$

A combination of these formulas gives

$$p_t(x,u;y,v) = p_t(y,-v;x,-u), \tag{2.2.5}$$

that we will use later on. See for example the Eqs (1.1), p 122, and (2.3), p 128, in [26], for references.

The semigroup of the Kolmogorov process will be written P_t. If f is a nonnegative measurable function, we have:

$$P_t f(x,u) := \mathbb{E}^+_{x,u}\big(f(Y_t,\dot{Y}_t)\big) = \int_{\mathbb{R}^2} dydv p_t(x,u;y,v) f(y,v).$$

The law of the Kolmogorov process with initial distribution given by the Lebesgue measure λ on $\mathbb{R}^2$ will be written $\mathbb{P}^+_\lambda$. It is given by the expression:

$$\mathbb{P}^+_\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda(dx,du)\mathbb{P}^+_{x,u}.$$

Although λ is only a σ-finite measure, the expression above still defines what we call a stochastic process in a generalized sense (this is a common generalization, though). We still use all the usual vocabulary, such as the law of the process, the law of the process at the instant t, even though this laws are now σ-finite measures and not probabilities.

Finally, we recall the scaling property of the Langevin process:

$$\mathbb{E}^+_{x,u}\Big(F\big((Y_t)_{t\geq 0}\big)\Big) = \mathbb{E}^+_{k^3x,ku}\Big(F\big((k^{-3}Y_{k^2t})_{t\geq 0}\big)\Big), \tag{2.2.6}$$

where F is any nonnegative measurable functional.

2.3 Stationary Kolmogorov process

The stationary Kolmogorov process is certainly not something new for the specialists, as it is known that λ is an invariant measure for the Kolmogorov process. This section still gives, for the interested reader, a rigorous introduction to the stationary Kolmogorov process, including a duality property that allows us to consider the effect of time-reversal, which will be a central point of this paper.

2.3.1 Stationarity and duality lemmas

We write λ for the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^2$.

Lemma 1. *For any nonnegative measurable functions f, g on $\mathbb{R}^2$ and every $t \geq 0$, we have:*

$$\mathbb{E}^+_\lambda\big(f(Y_t, \dot{Y}_t)\big) = \mathbb{E}^+_\lambda\big(f(Y_0, \dot{Y}_0)\big),$$

and:

$$\mathbb{E}^+_\lambda\big(f(Y_0, \dot{Y}_0)g(Y_t, \dot{Y}_t)\big) = \mathbb{E}^+_\lambda\big(f(Y_t, -\dot{Y}_t)g(Y_0, -\dot{Y}_0)\big).$$

This lemma states the (weak) stationarity of the measure λ and a duality property of the process under this measure.

Proof. Let f be a nonnegative measurable function on $\mathbb{R}^2$, and t be a positive real number.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^+_\lambda\big(f(Y_t, \dot{Y}_t)\big) &:= \int dxdu \mathbb{E}^+_{x,u}\big(f(Y_t, \dot{Y}_t)\big) \\
&= \int dxdu \int dydv\, p_t(x, u; y, v) f(y, v) \\
&= \int\int dxdudydv\, p_t(y, -v; x, -u) f(y, v) \qquad \text{by (2.2.5)} \\
&= \int dydv f(y, v) \int dxdu\, p_t(y, -v; x, u) \\
&= \int dydv f(y, v) \\
&= \mathbb{E}^+_\lambda\big(f(Y_0, \dot{Y}_0)\big),
\end{aligned}$$

where in the fourth line we made the simple change of variables $u \to -u$.

For the second part, let f and g be two nonnegative measurable functions, and t a positive real number.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^+_\lambda\big(f(Y_0, \dot{Y}_0)g(Y_t, \dot{Y}_t)\big) \\
= &\int dxdu f(x, u) \int dydv\, p_t(x, u; y, v) g(y, v) \\
= &\int\int dxdudydv f(x, -u) g(y, -v)\, p_t(x, -u; y, -v) \\
= &\int dydv g(y, -v) \int dxdu f(x, -u) p_t(y, v; x, u) \qquad \text{by (2.2.5) again} \\
= &\ \mathbb{E}^+_\lambda\big(g(Y_0, -\dot{Y}_0) f(Y_t, -\dot{Y}_t)\big).
\end{aligned}$$

The lemma is proved. $\square$

We adopt now the vectorial notations $Z_t = (Y_t, \dot{Y}_t)$ and its conjugate $\overline{Z}_t = (Y_t, -\dot{Y}_t)$. We immediately deduce the following corollary.

Corollary 1. *For any $t > 0$, we have:*
1) Stationarity: The law of the process $(Z_{t+s})_{s\geq 0}$ under $\mathbb{P}^+_\lambda$ is $\mathbb{P}^+_\lambda$.
2) Duality: the laws of the processes $(Zb_{t-s})_{0\leq s\leq t}$ and $(Z_s)_{0\leq s\leq t}$ under $\mathbb{P}^+_\lambda$ are the same.

This corollary provides a probabilistic interpretation of the stationarity and the duality property, here stated in a strong sense. Strong sense means that we consider the whole trajectory and not merely the two-dimensional time-marginals. We thus see that the stationarity is a property of invariance of the process by time-translation, and the duality a property of symmetry of the process by time-reversal and conjugation.

Proof. As the processes we consider are continuous, their laws are determined by their finite-dimensional marginals. The strong stationarity is a simple consequence from the weak stationarity and the Markov property, while the strong duality needs a bit more work. Let $n \in \mathbb{N}$, let $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ be real numbers and let f_0, f_1, …, f_n be $n+1$ nonnegative measurable functions. We have to prove that the following equality is satisfied:

$$\mathbb{E}^+_\lambda\big[f_0(Z_0)f_1(Z_{t_1})\ldots f_n(Z_{t_n})\big] = \mathbb{E}^+_\lambda\big[f_n(\overline{Z}_0)f_{n-1}(\overline{Z}_{t_n-t_{n-1}})\ldots f_1(\overline{Z}_{t_n-t_1})f_0(\overline{Z}_{t_n}))\big]. \quad (2.3.1)$$

We offer a proof[1] by induction on n. For $n = 1$, this is nothing else than the weak duality. We suppose now that the identity (2.3.1) is true for any integer strictly smaller than n. We have:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}^+_\lambda\big[f_0(Z_0)f_1(Z_{t_1})\ldots f_n(Z_{t_n})\big] \\
= \; & \mathbb{E}^+_\lambda\big[f_0(Z_0)\ldots f_{n-1}(Z_{t_{n-1}})\mathbb{E}^+_{Z_{t_{n-1}}}[f_n(Z_{t_n-t_{n-1}})]\big] \\
= \; & \mathbb{E}^+_\lambda\big[\mathbb{E}^+_{\overline{Z}_0}[f_n(Z_{t_n-t_{n-1}})]f_{n-1}(\overline{Z}_0)f_{n-2}(\overline{Z}_{t_{n-1}-t_{n-2}})\ldots f_0(\overline{Z}_{t_{n-1}})\big] \\
= \; & \mathbb{E}^+_\lambda\Big[\mathbb{E}^+_{\overline{Z}_0}[f_n(Z_{t_n-t_{n-1}})]\mathbb{E}^+_{\overline{Z}_0}\big[f_{n-1}(\overline{Z}_0)f_{n-2}(\overline{Z}_{t_{n-1}-t_{n-2}})\ldots f_0(\overline{Z}_{t_{n-1}})\big]\Big] \\
= \; & \mathbb{E}^+_\lambda\Big[f_n(Z_{t_n-t_{n-1}})\mathbb{E}^+_{\overline{Z}_0}\big[f_{n-1}(\overline{Z}_0)f_{n-2}(\overline{Z}_{t_{n-1}-t_{n-2}})\ldots f_0(\overline{Z}_{t_{n-1}})\big]\Big] \\
= \; & \mathbb{E}^+_\lambda\Big[f_n(\overline{Z}_0)\mathbb{E}^+_{Z_{t_n-t_{n-1}}}\big[f_{n-1}(\overline{Z}_0)f_{n-2}(\overline{Z}_{t_{n-1}-t_{n-2}})\ldots f_0(\overline{Z}_{t_{n-1}})\big]\Big] \\
= \; & \mathbb{E}^+_\lambda\big[f_n(\overline{Z}_0)f_{n-1}(\overline{Z}_{t_n-t_{n-1}})\ldots f_0(\overline{Z}_{t_n})\big].
\end{aligned}$$

To get the second equality, we used (2.3.1) with the functions f_0, …, f_{n-2} and $\tilde{f}_{n-1} : (x,u) \to f_{n-1}(x,u)\mathbb{E}^+_{x,u}\big[f_n(Z_{t_n-t_{n-1}})\big]$. To get the next to last one, we used the weak duality with times 0 and $t_n - t_{n-1}$.

This completes our proof. $\square$

1. A direct proof, like those of Lemma 1, may be more transparent. The interest of this proof is to show how the strong duality property follows from the weak one.

2.3.2 Construction of the stationary Kolmogorov process

We are ready to construct the stationary Kolmogorov process with time parameter $t \in \mathbb{R}$. First, we construct a process indexed by $\mathbb{R}$ with a position (x, u) at time 0. The process $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}} = (Y_t, \dot{Y}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ is such that $(Y_t, \dot{Y}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ has the law $\mathbb{P}^+_{x,u}$ and $(Y_{-t}, -\dot{Y}_{-t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ is an independent process and of law $\mathbb{P}^+_{x,-u}$. The law of the process $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}}$ will be denoted by $\mathbb{P}_{x,u}$.

Definition 1. *The stationary Kolmogorov process is the generalized process of law $\mathbb{P}_\lambda$ given by:*

$$\mathbb{P}_\lambda = \int dxdu\mathbb{P}_{x,u}. \tag{2.3.2}$$

Lemma 1 and Corollary 1 still hold if we drop the superscript $+$. We stress that the stationary Kolmogorov process has a natural filtration given by $\mathcal{F}_t = \sigma(\{Z_s\}_{-\infty<s\le t}) = \sigma(\{Y_s\}_{-\infty<s\le t})$. If $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}} = (Y_t, \dot{Y}_t)_{t\in\mathbb{R}}$, we call conjugate of Z and write $\overline{Z}$ for the process $\left(\overline{Z}_t\right)_{t\in\mathbb{R}} = (Y_t, -\dot{Y}_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

Lemma 2. *The stationary Kolmogorov process has the following properties:*

1. *Under $\mathbb{P}_\lambda$, The processes Z and $\left(\overline{Z}_{-t}\right)_{t\in\mathbb{R}}$ have the same law. That is, the law $\mathbb{P}_\lambda$ is invariant by time-reversal and conjugation.*

2. *Under $\mathbb{P}_\lambda$, the processes $(Y_t, \dot{Y}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ and $(Y_{t_0+t}, \dot{Y}_{t_0+t})_{t\in\mathbb{R}}$ have the same law for any $t_0 \in \mathbb{R}$. That is, the law $\mathbb{P}_\lambda$ is invariant by time-translation.*

3. *The process Z is a stationary Markov process under $\mathbb{P}_\lambda$.*

Proof. (1) Let us consider Z a process of law $\mathbb{P}_{x,u}$. It is immediate from the definition that the conjugate of the time-reversed process, that is $\left(\overline{Z}_{-t}\right)_{t\in\mathbb{R}}$, is a process of law $\mathbb{P}_{x,-u}$. The result follows.

(2) Let us write $\mathbb{P}^{t_0}_\lambda$ for the law of the process $(Y_{t_0+t}, \dot{Y}_{t_0+t})_{t\in\mathbb{R}}$ under $\mathbb{P}_\lambda$, and let us suppose in this proof that t_0 is positive. We want to prove that $\mathbb{P}^{t_0}_\lambda$ and $\mathbb{P}_\lambda$ are equal. It is enough to prove that for any suitable functional f, g and h, the expectations of the variable

$$f\big((Y_t)_{t\le -t_0}\big)\ g\big((Y_t)_{-t_0\le t\le 0}\big)\ h\big((Y_t)_{0\le t}\big)$$

under these two measures are equal[2]. On the one hand, we have:

2. We take only functionals of Y and not of $\dot{Y}$. This is in order to make the notations simpler and has no incidence, as $\dot{Y}$ can be recovered from Y by taking derivatives.

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}_\lambda^{t_0}\big[f((Y_t)_{t\le -t_0})g((Y_t)_{-t_0\le t\le 0})h((Y_t)_{0\le t})\big] \\
= \; & \mathbb{E}_\lambda\big[f((Y_t)_{t\le 0})g((Y_t)_{0\le t\le t_0})h((Y_t)_{t_0\le t})\big] \\
= \; & \mathbb{E}_\lambda\Big[\mathbb{E}_{Y_0,\dot Y_0}\big[f((Y_t)_{t\le 0})\big]\,\mathbb{E}_{Y_0,\dot Y_0}\big[g((Y_t)_{0\le t\le t_0})\mathbb{E}_{Y_{t_0},\dot Y_{t_0}}\big[h((Y_t)_{t_0\le t})\big]\big]\Big] \\
= \; & \mathbb{E}_\lambda\Big[\mathbb{E}_{Y_0,\dot Y_0}\big[f((Y_t)_{t\le 0})\big]\;g\big((Y_t)_{0\le t\le t_0}\big)\;\mathbb{E}_{Y_{t_0},\dot Y_{t_0}}\big[h((Y_t)_{t_0\le t})\big]\Big] \\
= \; & \mathbb{E}_\lambda\big[F(Y_0,\dot Y_0)\;g((Y_t)_{0\le t\le t_0})\;H(Y_{t_0},\dot Y_{t_0})\big],
\end{aligned}
$$

where we wrote $F(x,u) = \mathbb{E}_{x,u}\big[f((Y_t)_{t\le 0})\big]$ and $H(x,u) = \mathbb{E}_{x,u}\big[h((Y_t)_{t_0\le t})\big]$. To get the third line we use the independence of $(Y_t)_{t\le 0}$ and $(Y_t)_{t\ge 0}$ conditionally on $(Y_0,\dot Y_0)$ and the Markov property of $(Y_t)_{t\ge 0}$ at time t_0.

On the other hand, we have:

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}_\lambda\big[f((Y_t)_{t\le -t_0})g((Y_t)_{-t_0\le t\le 0})h((Y_t)_{0\le t})\big] \\
= \; & \mathbb{E}_\lambda\big[\mathbb{E}_{Y_{-t_0},\dot Y_{-t_0}}[f((Y_t)_{t\le 0})]\;g((Y_t)_{-t_0\le t\le 0})\;\mathbb{E}_{Y_0,\dot Y_0}[h((Y_t)_{0\le t})]\big] \\
= \; & \mathbb{E}_\lambda\big[F(Y_{-t_0},\dot Y_{-t_0})\;g((Y_t)_{-t_0\le t\le 0})\;H(Y_0,\dot Y_0)\big] \\
= \; & \mathbb{E}_\lambda\big[H(Y_0,\dot Y_0)\;g((Y_{t_0-t})_{0\le t\le t_0})\;F(Y_{t_0},\dot Y_{t_0})\big],
\end{aligned}
$$

where F and H are defined above and we used the time-reversal invariance property for $\mathbb{P}_\lambda$ to get the last line.

Now, the fact that the two expressions we get are equal is a direct consequence of the duality property stated in a strong sense.

(3) In this third statement the important word is the word *Markov*, not the word *stationary*. Indeed the Markov property for negative times is not immediate in the definition of $\mathbb{P}_\lambda$. But the Markov property for positive times is, and this combined with the stationarity immediately gives the Markov property for any time. □

In the following, we will speak about the stationary Kolmogorov process for the process $(Y,\dot Y)$ under $\mathbb{P}_\lambda$, and about the stationary Langevin process for the process Y under $\mathbb{P}_\lambda$.

Before speaking about excursions of these processes, let us notice that we could have constructed the stationary Kolmogorov process starting from time $-\infty$ with using just the stationarity (and not the duality). The way to do it is to consider the family of measures $({}^t\mathbb{P}_\lambda^+)_{t\le 0}$, where ${}^t\mathbb{P}_\lambda^+$ is the measure of the Kolmogorov process starting from the measure λ at time t . The stationarity gives us that these measures are compatible. We thus can use Kolmogorov extension theorem and construct the measure starting from time $-\infty$.

In this construction, though, the nontrivial fact is that the process is invariant by time-reversal, and we need the duality property to prove it.

2.4 Excursions of the stationary Langevin process

Until now we considered the Langevin - or of the Kolmogorov - process on an infinite time interval. In this section we will deal with the same process killed at certain hitting times. For the sake of convenience, we use here the notation Y for the canonical smooth process and $\dot{Y}$ for its derivative.

2.4.1 Stationary excursion measure

We will now study the *stationary excursion measure* for a stationary process given by Pitman in [33].

If t is a time such that $Y_t = 0$ and $\dot{Y}_t \neq 0$, we will write e^t or $(e^t_s)_{0 \leq s \leq \zeta}$ for the excursion of Y away from 0 started at time t, and ζ for its lifetime, that is, $\zeta(e^t) := \inf\{s > 0 : Y_{t+s} = 0\}$ and $e^t_s := Y_{t+s}$ for $0 \leq s \leq \zeta$.

It belongs to the *set of vertical excursions* $\mathcal{E}_0$, that is, the set of continuous functions $t \to Y_t$, defined on $\mathbb{R}_+$, that have a càdlàg right-derivative $\dot{Y}$, such that Y starts from zero ($Y_0 = 0$), Y leaves immediately zero (Y has a strictly positive lifetime $\zeta(Y)$), and dies after its first return to 0. This definition is inspired by the terminology of Lachal [26], except that he considers the set of vertical excursions for the two-dimensional process.

We write $\mathbb{P}^{\partial}_{x,u}$ for the law of the Langevin process starting with position x and velocity $u \neq 0$, and killed at its first return-time to 0. So it is a law on the set of vertical excursions, and under $\mathbb{P}^{+}_{0,u}$, the excursion starting at time 0 is written e^0 and has law $\mathbb{P}^{\partial}_{0,u}$.

Considering the stationary Langevin process and the homogeneous set $\{t, Y_t = 0\}$, we define in the sense of Pitman [33] the stationary excursion measure:

Definition 2. *We call* stationary excursion measure *of the stationary Langevin process, and we write Q_{ex}, the measure given by:*

$$Q_{ex}(\bullet) = \mathbb{E}_\lambda\big[\#\{0 < t < 1, Y_t = 0, e^t \in \bullet\}\big]. \tag{2.4.1}$$

We stress that this measure does not give a finite mass to the set of excursions with lifetime greater than 1, contrarily to the Itō excursion measure of a Markov process. By a slight abuse of notation, when A is an event, we will write $Q_{ex}(\mathbb{1}_A)$ for $Q_{ex}(A)$.

We stress that for convenience we focus here and thereafter on the Langevin process; clearly this induces no loss of generality as the Kolmogorov process can be recovered from the Langevin process by taking derivatives. For instance, the law of the two-dimensional process $(Y, \dot{Y})$ under Q_{ex} is equal to the stationary excursion measure for the stationary Kolmogorov process and the homogeneous set $\{t, (Y_t, \dot{Y}_t) \in \{0\} \times \mathbb{R}\}$.

Our main result is the following:

Theorem 1. *1) There is the identity:*

$$Q_{ex}(Y \in de) = \int_{u=-\infty}^{+\infty} |u| \mathbb{P}^{\partial}_{0,u}\big(Y \in de\big) du. \tag{2.4.2}$$

2) The measure Q_{ex} is invariant by time-reversal (at the lifetime): Namely, the measure of Y under Q_{ex} is the same as that of $\widehat{Y}$ under Q_{ex}, where $\widehat{Y}$ is defined by

$$\widehat{Y}_s = Y_{\zeta-s} \text{ for } 0 \leq s \leq \zeta.$$

Let us adopt the notation $\widehat{Q}_{ex}$ for the law of $\widehat{Y}$ under Q_{ex}. The second part of the theorem can be written $\widehat{Q}_{ex} = Q_{ex}$.

Let a Langevin process start from location 0 and have initial velocity distributed according to $|u|du$. Then the distribution of its velocity at the first instant when it returns to 0 is again $|u|du$.

This remarkable fact can be proved directly as follows. We use the formula found by McKean [31], which gives, under $\mathbb{P}_{0,u}$, the joint density of ζ and $\dot{Y}_\zeta$, and which specifies the density of $\dot{Y}_\zeta$. For $u > 0$ and $v \geq 0$, we have:

$$\mathbb{P}_{0,u}(\zeta \in ds, -\dot{Y}_{\zeta-} \in dv) = dsdv\frac{3v}{\pi\sqrt{2}s^2}\exp\Big(-2\frac{v^2-uv+u^2}{s}\Big)\int_0^{\frac{4uv}{s}} \mathrm{e}^{-\frac{3\theta}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}}, \quad (2.4.3)$$

and in particular:

$$\mathbb{P}_{0,u}(-\dot{Y}_{\zeta-} \in dv) = \frac{3}{2\pi}\frac{u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{3}{2}}}{u^3+v^3}dv. \quad (2.4.4)$$

This formulas naturally still hold when you replace $\mathbb{P}_{0,u}$ by $\mathbb{P}^{\partial}_{0,u}$ and $\dot{Y}_\zeta$ by $\dot{Y}_{\zeta-}$.

In the calculation, we actually just need the second formula. Let v be any positive real number. We have:

$$\begin{aligned} Q_{ex}(\dot{Y}_{\zeta-} \in dv) &= \int_{u=-\infty}^{0} |u|\mathbb{P}^{\partial}_{0,u}(\dot{Y}_{\zeta-} \in dv)du \\ &= \int_{u=0}^{+\infty} |u|\mathbb{P}_{0,u}(-\dot{Y}_{\zeta-} \in dv)du \\ &= vdv\int_{u=0}^{+\infty}\frac{3}{2\pi}\frac{u^{\frac{3}{2}}v^{\frac{1}{2}}}{u^3+v^3}du \\ &= vdv. \end{aligned}$$

The integral gives one as it is the integral of the density of $-\dot{Y}_\zeta$ under $\mathbb{P}_{0,v}$, thanks to (2.4.4). The case v negative is similar and gives us $Q_{ex}(\dot{Y}_{\zeta-} \in dv) = -vdv$, as claimed.

Proof of Theorem 1. 1) This proof is mainly a combination of the work of Pitman [33] translated to the Langevin process, and of known results on the Langevin process, results that we can find in [26].

We recall and adapt some of their notations.

In [26], we consider the Langevin process on positive times, and the last instant that the process crosses zero before a fixed time T is written τ_T^-. In [33], we write G_u for the last instant before u that the stationary process crosses zero. The variable G_u can take finite strictly negative values, while the variable τ_T^- cannot. If T is a positive time, then we can write $\tau_T^- = \mathbb{1}_{G_T \geq 0} G_T$.

In [33], the part (iv) of the Theorem (p 291), rewritten with our notations, states [3] :

$$\mathbb{P}_\lambda(-\infty < G_0 < 0, e^{G_0} \in de) = Q_{ex}(de)\zeta(e) \tag{2.4.5}$$

In [26], the Lemma 2.5, p 129, states an important and simple relation, that can be written

$$\mathbb{P}^\partial_{0,v}\big((Y_t, \dot{Y}_t) \in dxdu\big)|v|dvdt = \mathbb{P}_{x,-u}(\zeta \in dt, -\dot{Y}_\zeta \in dv)dxdu, \tag{2.4.6}$$

and that is a main tool used to prove the Theorem 2.6. The points 1) and 4) of this Theorem state:

$$\mathbb{P}^+_{x,u}\big\{(\tau_T^-, \dot{Y}_{\tau_T^-}) \in dsdv\big\}/dsdv = |v|p_s(x,u,0,v)\mathbb{P}^+_{0,v}\{\zeta > T-s\}, \tag{2.4.7}$$

$$\mathbb{E}^+_{x,u}\big[F(\tau_T^-, e_Z^{\tau_T^-})|(\tau_T^-, \dot{Y}_{\tau_T^-}) = (s,v)\big] = \mathbb{E}^+_{0,v}[F(s, e_Z^0)|\zeta > T-s], \tag{2.4.8}$$

where F is any suitable functional, and e_Z^t denotes the excursion of the two-dimensional process started at a time t such that $Y_t = 0$.

Let us now begin. From (2.4.5), it is sufficient to prove the following:

$$\mathbb{P}_\lambda(-\infty < G_0 < 0, e^{G_0} \in de) = \zeta(e)\int_{u=-\infty}^{+\infty} |u|\mathbb{P}^\partial_{0,u}(Y \in de)du. \tag{2.4.9}$$

We start from:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\lambda(-\infty < G_0 < 0, e^{G_0} \in de) &= \lim_{T\to\infty} \mathbb{P}_\lambda(-T < G_0 < 0, e^{G_0} \in de),\\
&= \lim_{T\to\infty} \mathbb{P}_\lambda(0 < G_T < T, e^{G_T} \in de),\\
&= \lim_{T\to\infty} \int dxdu\mathbb{P}_{x,u}(0 < G_T < T, e^{G_T} \in de).
\end{aligned}$$

Hence we have:

$$\mathbb{P}_\lambda(-\infty < G_0 < 0, e^{G_0} \in de) = \lim_{T\to\infty} \int dxdu\mathbb{P}_{x,u}(0 < \tau_T^- < T, e^{\tau_T^-} \in de).$$

3. Actually, the article of Pitman states $\mathbb{P}_\lambda(-\infty < G_u < u, e^{G_u} \in de) = Q_{ex}(de)\zeta(e)$ for any $u \in \mathbb{R}$.

Let us write the term in the limit.

$$\begin{aligned}
&\int dxdu \;\; \mathbb{P}_{x,u}(0<\tau_T^- <T, e^{\tau_T^-}\in de)\\
=\;& \int dxdu \int \mathbb{P}_{x,u}\big((\tau_T^-,\dot Y_{\tau_T^-})\in dsdv\big) \quad \mathbb{P}_{x,u}\big(e^{\tau_T^-}\in de|(\tau_T^-,\dot Y_{\tau_T^-})=(s,v)\big),\\
=\;& \int dxdu \int \mathbb{P}^+_{x,u}\big((\tau_T^-,\dot Y_{\tau_T^-})\in dsdv\big) \quad \mathbb{P}^+_{x,u}\big(e^{\tau_T^-}\in de|(\tau_T^-,\dot Y_{\tau_T^-})=(s,v)\big),\\
=\;& \int dxdu \int dsdv|v|p_s(x,u,0,v)\mathbb{P}^+_{0,v}\{\zeta>T-s\}\mathbb{P}^+_{0,v}(e^0\in de|\zeta>T-s),
\end{aligned}$$

where the integrals cover $(x,u)\in\mathbb{R}^2$, $(s,v)\in[0,T]\times\mathbb{R}$. In the last line we used (2.4.7), and (2.4.8) with the simple function $F\big(s,(Y,\dot Y)\big)=\mathbf{1}_{Y\in de}$.

By Fubini, the last expression is also equal to

$$\begin{aligned}
&\int dv|v|\int ds\Big(\int dxdu\; p_s(x,u,0,v)\Big)\mathbb{P}^+_{0,v}(e^0\in de,\zeta>T-s).\\
=\;& \int dv|v|\int_0^T ds\mathbb{P}^\partial_{0,v}(Y\in de, s>T-\zeta(e))\\
=\;& \int dv|v|\mathbb{P}^\partial_{0,v}(Y\in de)(\zeta(e)\wedge T),
\end{aligned}$$

where we get the second line because

$$\int dxdu\; p_s(x,u,0,v)=\int dxdu\; p_s(0,-v;x,-u)=1.$$

Now, letting T go to ∞ gives us (2.4.9) and completes our proof.

2) We use the definition of Q_{ex} by the equation (2.4.1). The time-translation and time-reversal invariance of $\mathbb{E}_\lambda$ gives us the time-reversal invariance of Q_{ex}. □

We point out that the measure Q_{ex} has a remarkably simple potential, given by:

$$\int_{\mathbb{R}_+} Q_{ex}\big((Y_t,\dot Y_t)\in\bullet\big)dt=\lambda(\bullet). \tag{2.4.10}$$

Proof. This is a consequence of (2.4.2) and (2.4.6), that gives:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+} Q_{ex}\big((Y_t,\dot Y_t)\in dxdu\big)dt &= \int_{\mathbb{R}_+} dt\int_{-\infty}^{+\infty}|v|dv\mathbb{P}^\partial_{0,v}\big((Y_t,\dot Y_t)\in dxdu\big)\\
&= dxdu\int_{\mathbb{R}_+}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{P}_{x,-u}(\zeta\in dt,-\dot Y_\zeta\in dv)\\
&= dxdu.
\end{aligned}$$

□

Finally, let us notice that we get a scaling property for the stationary excursion measure, which is a simple consequence from (2.2.6) and (2.4.2):

$$Q_{ex}\Big(F\big((Y_t)_{t\geq 0}\big)\Big) = k^{-2}Q_{ex}\Big(F\big((k^{-3}Y_{k^2t})_{t\geq 0}\big)\Big), \tag{2.4.11}$$

where F is any nonnegative measurable functional.

2.4.2 Conditioning and $h-$transform

In the preceding section we defined the stationary excursion measure, we described it with a simple formula and we proved its invariance by time-reversal. This is a global result for this measure. Now we would like to provide a more specific description according to the starting and ending velocities of the excursions. That is, we would like to define and investigate the excursion measure conditioned to start with a velocity u and end with a velocity $-v$, that would be a probability measure written $Q_{u;v}$.

Let us first notice that the measure $Q_{ex}(\dot{Y}_0 \in du, -\dot{Y}_{\zeta-} \in dv)$ has support $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2, uv \geq 0\}$. It has a density with respect to the Lebesgue measure, that we write $\varphi(u,v)$. This density is given, for $u > 0$, $v > 0$ or $u < 0$, $v < 0$, by:

$$\begin{aligned}
\varphi(u,v) &= \frac{1}{dudv}\Big(|u|\mathbb{P}^{\partial}_{0,u}(-\dot{Y}_{\zeta-} \in dv)du\Big) \\
&= \frac{3}{2\pi}\frac{|u|^{\frac{3}{2}}|v|^{\frac{3}{2}}}{|u|^3+|v|^3}.
\end{aligned}$$

Definition 3. *We write $(Q_{u;v})_{uv>0}$ for a version of the conditional law of Q_{ex} given the initial speed is u and the final speed $-v$. That is, for $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ and $G : \mathcal{E}_0 \to \mathbb{R}$ nonnegative measurable functionals, we have:*

$$Q_{ex}\big(f(\dot{Y}_0, -\dot{Y}_{\zeta-})G\big) = \int Q_{u;v}(G)f(u,v)\varphi(u,v)dudv. \tag{2.4.12}$$

It is clear that $Q_{-u;-v}$ is the image of $Q_{u;v}$ by the symmetry $Y \to -Y$, for almost all (u,v), so that in the following we will only be interested in $Q_{u;v}$ for $u > 0$, $v > 0$.

From the time-reversal invariance of the stationary excursion measure, i.e $\widehat{Q}_{ex} = Q_{ex}$, we deduce immediately the following time-reversal property of the conditioned measures:

$$\widehat{Q}_{u;v} = Q_{v;u} \qquad \text{for a. a. } (u,v) \in (\mathbb{R}_+)^2. \tag{2.4.13}$$

Recall from the formula (2.4.2) that $|u|\mathbb{P}^{\partial}_{0,u}$ is a version of the conditional law of Q_{ex} given the initial speed u. It follows that we have the following formula:

$$\mathbb{P}^{\partial}_{0,u} = |u|^{-1}\int Q_{u;v}\varphi(u,v)dv \quad \text{ for almost all } u > 0 \tag{2.4.14}$$

The measure $|u|^{-1}\varphi(u,v)dv$ is the law of $-\dot{Y}_{\zeta-}$ under $\mathbb{P}^{\partial}_{0,u}$. Hence $Q_{u;v}$ is a version of the conditional law of $\mathbb{P}^{\partial}_{0,u}$ given $-\dot{Y}_{\zeta-} = -v$. Before going on, we need precise informations on the variable $-\dot{Y}_{\zeta-}$ and its law, under different initial conditions. The results we need are gathered in the following lemma. We take the notations $\mathbb{R}_+^*$ for $\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$, and D for the domain $\big((\mathbb{R}_+^*)\times\mathbb{R}\big)\bigcup\big(\{0\}\times(\mathbb{R}_+^*)\big)$.

Lemma 3. • *For any (x,u) in D, the density of the law of the variable $-\dot{Y}_{\zeta-}$ under $\mathbb{P}^\partial_{x,u}$ with respect to the Lebesgue measure on $(0,\infty)$ exists and is written $h_v(x,u)$ for $v>0$. We have:*

$$h_v(x,u) \;=\; v\Big[\Phi_0(x,u;-v)-\frac{3}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\mu^{\frac{3}{2}}}{\mu^3+1}\Phi_0(x,u;\mu v)d\mu\Big], \tag{2.4.15}$$

where $\Phi_0(x,u;v):=\Phi(x,u;0,v)$ and

$$\Phi(x,u;y,v):=\int_0^\infty p_t(x,u;y,v)dt.$$

For $x=0$, this formula can be simplified as:

$$h_v(0,u) \;=\; \frac{3}{2\pi}\frac{u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{3}{2}}}{u^3+v^3}. \tag{2.4.16}$$

• *The function $(v,x,u)\to h_v(x,u)$ is continuous on $E:=\mathbb{R}_+^*\times D$. The function Φ_0 is continuous and differentiable on $D\times\mathbb{R}$. Moreover, we have the following equivalence for v in the neighborhood of zero:*

$$h_v(x,u)\sim\overline{h_0}(x,u)v^{\frac{3}{2}}, \tag{2.4.17}$$

where $\overline{h_0}(x,u)$ is given by

$$\overline{h_0}(x,u)=\frac{3}{\pi}\int_0^\infty \alpha^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\Phi_0}{\partial v}(x,u;\alpha)d\alpha.$$

For $x=0$, this formula can be simplified as

$$\overline{h_0}(0,u)=\frac{3u^{-\frac{5}{2}}}{2\pi}.$$

This is a technical lemma, with a long proof that we report in the Appendix.

The idea is now, thanks to this lemma, to prove that the law $\mathbb{P}^\partial_{0,u}$ conditioned on the event $-\dot{Y}_{\zeta-}\in[v,v+\eta]$, has a limit when η goes to zero. This limit is necessarily $Q_{u;v}$ a. s. Hence we get an expression for $Q_{u;v}$, that will happen to be a bi-continuous version.

Let us fix $u,v,t>0$, and let ϕ_t be an $\mathcal{F}_t$-measurable nonnegative functional. We have:

$$\begin{aligned}\lim_{\eta\to0}\mathbb{E}^\partial_{0,u}\big(\phi_t\mathbb{1}_{\zeta>t}|-\dot{Y}_{\zeta-}\in[v,v+\eta]\big) &= \lim_{\eta\to0}\frac{\mathbb{E}^\partial_{0,u}(\phi_t\mathbb{1}_{\zeta>t,-\dot{Y}_{\zeta-}\in[v,v+\eta]})}{\mathbb{P}^\partial_{0,u}(-\dot{Y}_{\zeta-}\in[v,v+\eta])}\\ &= \mathbb{E}^\partial_{0,u}\left(\phi_t\mathbb{1}_{\zeta>t}\lim_{\eta\to0}\frac{\mathbb{P}^\partial_{Y_t,\dot{Y}_t}(-\dot{Y}_{\zeta-}\in[v,v+\eta])}{\mathbb{P}^\partial_{0,u}(-\dot{Y}_{\zeta-}\in[v,v+\eta])}\right).\end{aligned}$$

The limit exists and is equal to the quotient of $h_v(Y_t, \dot{Y}_t)$ by $h_v(0, u)$. Hence, we get:

$$Q_{u;v}(\phi_t \mathbb{1}_{\zeta>t}) = \mathbb{E}^{\partial}_{0,u}\left(\phi_t \mathbb{1}_{\zeta>t}\frac{h_v(Y_t, \dot{Y}_t)}{h_v(0,u)}\right). \tag{2.4.18}$$

for any $t > 0$, any $\mathcal{F}_t$-measurable functional ϕ_t.

From the continuity of h we deduce that $Q_{u;v}$ is jointly continuous in u, v, $(u, v) \in (\mathbb{R}^*_+)^2$. Furthermore, thanks to (2.4.17), when v goes to zero, the quotient goes to $\frac{\overline{h_0}(Y_t,\dot{Y}_t)}{\overline{h_0}(0,u)}$. We deduce that the measures $Q_{u;v}$ have a weak limit when v goes to zero, that we write $Q_{u;0}$. We have

$$Q_{u;0}(\phi_t \mathbb{1}_{\zeta>t}) = \mathbb{E}^{\partial}_{0,u}\left(\phi_t \mathbb{1}_{\zeta>t}\frac{\overline{h_0}(Y_t, \dot{Y}_t)}{\overline{h_0}(0,u)}\right). \tag{2.4.19}$$

Formulas (2.4.18) and (2.4.19) express the measures $Q_{u;v}$ as h-transforms of the more usual laws $\mathbb{P}^{\partial}_{0,u}$. The h-transforms are common when dealing with conditioned Markov process, see for example [1], and in particular the chapters *4.7.* and *6.4.* for the connection with time-reversal.

Informally, in the case of two processes in duality, changing the initial condition for one process corresponds to changing the probability transitions of the second process into an h-transform of these probability transitions. The h-transform means the measure "conditioned" with using a certain harmonic function h, that we can write explicitly.

We finish this section with giving the scaling property of the measures $Q_{u;v}$, that follows for example from (2.2.6) and (2.4.12):

Proposition 1. *For any $u > 0$, $v \geq 0$, we have:*

$$Q_{u;v}\Big(F\big((Y_t)_{t\geq 0}\big)\Big) = Q_{ku;kv}\Big(F\big((k^{-3}Y_{k^2t})_{t\geq 0}\big)\Big), \tag{2.4.20}$$

where F is any nonnegative measurable functional.

2.5 Reflected Kolmogorov process

2.5.1 Preliminaries on the reflected Kolmogorov process

We begin this section on a new basis, with introducing a particular process that has been studied recently. This is only in a second part that the definitions that we developed before will be used for this particular process.

So, the question of the existence of the Langevin process reflected at a completely inelastic boundary was raised by B.Maury in 2004 in [30]. J.Bertoin answered to this question: In [4] he defines the reflected Langevin process, proves its existence and the uniqueness in law, and gets some other results. We also mention another paper [5] that studies the problem of the reflected Langevin process from the point of view of stochastic differential equations.

Definition 4. *We say that $(X, \dot{X})$ is a Kolmogorov process reflected at a completely inelastic boundary (or just reflected Kolmogorov process) if it is a càdlàg strong Markov process with values in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ which starts from $(0,0)$, such that $\dot{X}$ is the right-derivative of X, and also:*

$$\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{X_t=0\}} dt = 0 \text{ and } \big(X_t = 0 \ \Rightarrow \ \dot{X}_t = 0\big) a.s.,$$

and which "evolves as a Kolmogorov process when $X > 0$", in the following sense:

> For every stopping time S in the natural filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ of X, conditionally on $X_S = x > 0$ and $\dot{X}_S = v$, the shifted process $(X_{S+t})_{t\geq 0}$ stopped when hitting 0 is independent of $\mathcal{F}_S$, and has the distribution of a Langevin process started with velocity v from the location x and stopped when hitting 0.

We say that X is a Langevin process reflected at a completely inelastic boundary (or just reflected Langevin process) if $(X, \dot{X})$ is a reflected Kolmogorov process.

In the following we choose the vocabulary and the notations of the one-dimensional process, that is the Langevin process, to state our results.

In his paper Bertoin gives an explicit construction of a reflected Langevin process: Starting from a Langevin process Y, he first defines a process $\tilde{X}$ using Skorohod's reflection:

$$\tilde{X}_t = Y_t - \inf_{0\leq s\leq t} Y_s.$$

Let us notice that an excursion of that process does take off with zero velocity. However, that process cannot be the right one because

$$\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{\tilde{X}_t=0\}} dt = \infty \ a.s,$$

while we require

$$\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{\tilde{X}_t=0\}} dt = 0 \ a.s.$$

Further, it is easy to check that $(\tilde{X}, \dot{\tilde{X}})$ fails to be Markovian. But Bertoin then introduces a change of time, with writing

$$T_t := inf\Big\{ s \geq 0 : \int_0^s \mathbf{1}_{\tilde{X}_u > 0} du > t \Big\}$$

and

$$X_t := \tilde{X} \circ T_t.$$

This process X is a reflected Langevin process. The same paper also proves [4] the uniqueness of the law of a reflected Langevin process, so that we will speak about *the* reflected Langevin process. In the rest of the paper, we will concentrate our attention on what is one of the first steps in the study of this process, that is to say its Itō excursion measure. We recall that it is unique up to a multiplicative constant.

2.5.2 Itō excursion measure of the reflected Langevin process

In this section we will thus deal with the excursions of the reflected Langevin process. For the sake of convenience, we use here the notation X for the canonical smooth process, $\dot{X}$ for its derivative.

We consider the "set of ends of vertical excursions" $\mathcal{E}$, that is the set of excursions, except that we do not require anymore that the excursions should start from position 0. This set, endowed with the supremum norm of the process and its derivative, is a metric space including $\mathcal{E}_0$. In the following, we write $F : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ for a general continuous bounded functional which is identically 0 on some neighborhood of the path $X \equiv 0$.

We are ready to state a first formula, given [5] by Bertoin [4]:

Proposition 2. *The following limit*

$$\mathbf{n}\big(F(X)\big) := \lim_{x \to 0+} x^{-\frac{1}{6}} \mathbb{E}^{\partial}_{x,0}\big(F(X)\big),$$

exists and defines uniquely a measure on $\mathcal{E}$ with $\mathbf{n}(0) = 0$, and which support is included in $\mathcal{E}_0$. The measure $\mathbf{n}$ is an Itō excursion measure of the reflected Langevin process.

This is to say, we get an expression for the Itō excursion measure of the reflected Langevin process as a limit of known measures.

This result resembles the classical approximation of the Itō measure of the absolute value of the Brownian motion by $x^{-1}\mathbb{P}^{\partial}_x$, where $\mathbb{P}^{\partial}_x$ is the law of the Brownian motion starting from x and killed when hitting 0.

As a consequence of this expression, we can give the scaling property of this measure, also mentioned in [4], Proposition 2:

Corollary 2. *We have:*

$$\mathbf{n}\Big(F\big((X_t)_{t\geq 0}\big)\Big) = k^{\frac{1}{2}} \mathbf{n}\Big(F\big((k^{-3} X_{k^2 t})_{t \geq 0}\big)\Big),$$

for any nonnegative measurable functional F.

4. The idea of the above construction is still a central point of the proof

5. Actually Bertoin states this result in a slightly different form, as the set of excursions he considers is not the exactly same as the one we consider here. Nevertheless, his argument still works in our settings.

Proof. Let F be a general continuous bounded functional which is identically 0 on some neighborhood of the path $e \equiv 0$. The proposition gives us:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}\big(F((X_t)_{t\geq 0})\big) &= \lim_{x\to 0+} x^{-\frac{1}{6}}\mathbb{E}^{\partial}_{x,0}\big(F((X_t)_{t\geq 0})\big) \\
&= k^{\frac{1}{2}} \lim_{x\to 0+} (k^3 x)^{-\frac{1}{6}}\mathbb{E}^{\partial}_{k^3 x,0}\big(F((k^{-3}X_{k^2 t})_{t\geq 0})\big) \qquad \text{by (2.2.6)} \\
&= k^{\frac{1}{2}}\mathbf{n}\big(F((k^{-3}X_{k^2 t})_{t\geq 0})\big).
\end{aligned}$$

The result follows. □

We give here two new expressions of the Itō excursion measure of the reflected process. The first one is similar to the one above, expressed as a limit. But it is a limit of laws of the process starting with a zero position and a small speed, instead of a zero speed and a small position.

Theorem 2. *The following limit*

$$\mathbf{n}'\big(F(X)\big) = \lim_{u\to 0+} u^{-\frac{1}{2}}\mathbb{E}^{\partial}_{0,u}\big(F(X)\big),$$

exists and defines uniquely a measure on $\mathcal{E}$ with $\mathbf{n}'(0) = 0$, and which support is included in $\mathcal{E}_0$. We have:

$$\mathbf{n}' = \Big(\frac{3}{2}\Big)^{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\Big(\frac{1}{3}\Big)\mathbf{n}.$$

This formula is useful because we have more explicit densities for the law $\mathbb{P}_{0,u}$ than for the law $\mathbb{P}_{x,0}$ (cf (2.4.3) and (2.4.4)). For example, we can easily infer the following corollaries:

Corollary 3. *The joint density of ζ and $\dot{X}_{\zeta-}$ under $\mathbf{n}'$ is given by:*

$$\mathbf{n}'(\zeta \in ds, |\dot{X}_{\zeta-}| \in dv) = 6\sqrt{\frac{2v^3}{\pi^3 s^5}}\exp\Big(-2\frac{v^2}{s}\Big)dsdv.$$

Remark. Taking the second marginal of this density, this gives the $\mathbf{n}'$-density of $-\dot{X}_{\zeta-}$,

$$\mathbf{n}'(|\dot{X}_{\zeta-}| \in dv) = \frac{3}{2\pi}v^{-\frac{3}{2}}dv.$$

This improves Corollary 2 (ii) in [4].

Proof. It is easy to check, for example from the corresponding property for the free Langevin process, that $|\dot{X}_{\zeta-}| \neq 0$ $\mathbf{n}'$-almost surely. But $X \to (\zeta(X), |\dot{X}_{\zeta-}|)$ is continuous on $|\dot{X}_{\zeta-}| \neq 0$ thus we can use the limit formula to get the density:

$$\mathbf{n}'(\zeta \in ds, |\dot{X}_{\zeta-}| \in dv) = \lim_{u\to 0} u^{-\frac{1}{2}}\mathbb{P}^{\partial}_{0,u}(\zeta \in ds, |\dot{X}_{\zeta-}| \in dv).$$

Now, using (2.4.3), we can calculate:

$$\begin{aligned}
& \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{dsdv}\mathbb{P}^{\partial}_{0,u}(\zeta \in ds, |\dot{X}_{\zeta-}| \in dv) \\
= \; & u^{-\frac{1}{2}}\frac{3v}{\pi\sqrt{2}s^2}\exp\Big(-2\frac{u^2 - vu + v^2}{s}\Big)\int_0^{\frac{4uv}{s}} \mathrm{e}^{-\frac{3\theta}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \\
\sim \; & \frac{3vu^{-\frac{1}{2}}}{\pi\sqrt{2}s^2}\exp\Big(-2\frac{v^2}{s}\Big)\int_0^{\frac{4uv}{s}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \\
\sim \; & \frac{6\sqrt{2}}{\pi^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{v^3}{s^5}}\exp\Big(-2\frac{v^2}{s}\Big),
\end{aligned}$$

so that we have, as stated:

$$\mathbf{n}'(\zeta \in ds, |\dot{X}_{\zeta-}| \in dv) = c\sqrt{\frac{v^3}{s^5}}\exp\Big(-2\frac{v^2}{s}\Big)dsdv.$$

$\square$

Corollary 4. *The measure $\overline{h}_0(x,-u)dxdu$, $x \geq 0, u \in \mathbb{R}$, is invariant for the reflected Kolmogorov process.*

Proof. It is well-known that the occupation measure under the Itō's excursion measure

$$\mu(dx, du) = \mathbf{n}'\left(\int_{[0,\zeta]} \mathbb{1}_{Z_t \in (dx,du)}dt\right),$$

is an invariant measure for the underlying Markov process (cf Theorem 8.1 in [12])

This enables us to calculate:

$$\begin{aligned}
\mu(dx, du) &= \lim_{v\to 0} v^{-\frac{1}{2}}\mathbb{E}^{\partial}_{0,v}\left(\int_{[0,\zeta]} \mathbb{1}_{Z_t \in (dx,du)}dt\right). \\
&= \lim_{v\to 0} v^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{P}^{\partial}_{0,v}\big(Z_t \in (dx,du)\big)dt \\
&= dxdu \lim_{v\to 0} v^{-\frac{3}{2}}\frac{\mathbb{P}_{x,-u}(-\dot{X}_{\zeta-} \in dv)}{dv} \qquad \text{by (2.4.6)} \\
&= \overline{h}_0(x,-u)dxdu \qquad \text{by Lemma 3.}
\end{aligned}$$

$\square$

Proof of Theorem 2. In order to prove $\mathbf{n}' = c_1\mathbf{n}$, it is enough to prove that $\mathbf{n}'(F(X)) = c_1\mathbf{n}(F(X))$, for F a Lipschitz bounded functional. The idea of this proof will be to compare the quantities

$$u^{-\frac{1}{2}}\mathbb{E}^{\partial}_{0,u}\big(F(X)\big) \quad \text{and} \quad u^{-\frac{1}{2}}\mathbb{E}^{\partial}_{0,u}\big(F \circ \Theta_{\tau_0}(X)\big),$$

where Θ is the usual translation operator, defined by

$$\Theta_t\big((X_s)_{s\geq 0}\big) := (X_{t+s})_{s\geq 0},$$

and τ_x is the hitting time of x for the velocity process.

First we will control the difference, cutting the space on two events, the event that τ_0 is "small", on which we will use that F is Lipschitz, and the event that τ_0 is "big", that has a small probability. Next we will use a Markov property to see that the quantity $u^{-\frac{1}{2}}\mathbb{E}^{\partial}_{0,u}\big(F\circ\Theta_{\tau_0}(X)\big)$ can be compared to $\mathbf{n}(F)$.

As a preliminary we prove some estimates:

• We write $\mathbf{P}_u$ for the law of the Brownian motion started from u. We write τ_x for both the hitting time of x for the velocity process under $\mathbb{P}^{\partial}_{0,u}$, and the hitting time of x for the Brownian motion under $\mathbf{P}_u$. Let a be a constant. A simple calculation based on the scaling property of the Brownian motion and on the reflection principle gives:

$$\begin{aligned} u^{-\frac{1}{2}}\mathbb{P}^{\partial}_{0,u}(\tau_0\geq au) &= u^{-\frac{1}{2}}\mathbf{P}_u(\tau_0\geq au)\\ &= u^{-\frac{1}{2}}\mathbf{P}_0(\tau_{a^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}}\geq 1)\\ &= u^{-\frac{1}{2}}\mathbf{P}\big(\mathcal{N}(0,1)\in[-a^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}},a^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}]\big)\\ &\leq a^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \end{aligned}$$

where $\mathcal{N}(0,1)$ is a Gaussian variable with mean zero and variance 1.

• Let us write h for the supremum of the absolute value of the velocity process. Let b be a constant. We have:

$$\begin{aligned} u^{-\frac{1}{2}}\mathbb{P}^{\partial}_{0,u}(h\geq b) &\leq u^{-\frac{1}{2}}\mathbb{P}^{\partial}_{0,u}(\tau_b<\tau_0)+u^{-\frac{1}{2}}\mathbb{P}^{\partial}_{0,u}(h\circ\Theta_{\tau_0}\geq b)\\ &\leq u^{-\frac{1}{2}}\mathbb{P}_{0,u}(\tau_b<\tau_0)+u^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}_+}\mathbb{P}_{0,u}(X_{\tau_0}\in dx)\mathbb{P}^{\partial}_{x,0}(h\geq b)\\ &\leq \frac{u^{\frac{1}{2}}}{b}+u^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}_+}\mathbb{P}_{0,u}(X_{\tau_0}\in dx)x^{\frac{1}{6}}f(x), \end{aligned}$$

where the function $f:x\to x^{-\frac{1}{6}}\mathbb{P}^{\partial}_{x,0}(h\geq b)$ is bounded and has limit $f(0)=\mathbf{n}(h\geq b)$ at zero, thanks to Proposition 2. In the sum, the second term is thus equal to:

$$\begin{aligned} u^{-\frac{1}{2}}\mathbb{E}_{0,u}\big(X_{\tau_0}^{\frac{1}{6}}f(X_{\tau_0})\big) &= u^{-\frac{1}{2}}\mathbb{E}_{0,1}\big((u^3X_{\tau_0})^{\frac{1}{6}}f(u^3X_{\tau_0})\big)\\ &= \mathbb{E}_{0,1}\big(X_{\tau_0}^{\frac{1}{6}}f(u^3X_{\tau_0})\big)\\ &\to_{u\to 0} \mathbb{E}_{0,1}\big(X_{\tau_0}^{\frac{1}{6}}\big)f(0), \end{aligned}$$

where in the second line we used the usual scaling property for the Langevin process.

We write $c_1=\mathbb{E}_{0,1}\big(X_{\tau_0}^{\frac{1}{6}}\big)$, so that we have the bound:

$$u^{-\frac{1}{2}}\mathbb{P}^{\partial}_{0,u}(h \geq b) \leq \frac{u^{\frac{1}{2}}}{b} + c_1\mathbf{n}(h \geq b).$$

We would like to prove that c_1 is finite. We can actually calculate it explicitly. Indeed, thanks to Lefebvre [27] we know that the density of the variable X_{τ_0} under $\mathbb{P}_{0,1}$ is given by:

$$\mathbb{P}_{0,1}(X_{\tau_0} \in d\xi) = \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{3^{\frac{1}{6}}2^{\frac{2}{3}}\pi}\xi^{-\frac{4}{3}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{9\xi}}d\xi,$$

so that we can calculate:

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_{\mathbb{R}_+} \xi^{\frac{1}{6}}\mathbb{P}_{0,1}(X_{\tau_0} \in d\xi) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{2^{\frac{2}{3}}3^{\frac{1}{6}}\pi}\int_{\mathbb{R}_+} \xi^{-\frac{7}{6}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{9\xi}}d\xi \\ &= \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{2^{\frac{2}{3}}3^{\frac{1}{6}}\pi}\int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{1}{6}} x^{-\frac{5}{6}}\mathrm{e}^{-x}dx \\ &= \frac{3^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{5}{6}}\pi}\Gamma\Big(\frac{2}{3}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{6}\Big) \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\Big(\frac{1}{3}\Big), \end{aligned}$$

Let us notice that this is the constant that appears in the theorem.

• We are ready to tackle the proof of this theorem. We write l for the Lipschitz constant of F. We have:

$$\begin{aligned} u^{-\frac{1}{2}}\mathbb{E}^{\partial}_{0,u}\big(|F(e) - F\circ\Theta_{\tau_0}(e)|\mathbb{1}_{\tau_0<au,h<b}\big) &\leq u^{-\frac{1}{2}}l(au)b \\ &\leq abu^{\frac{1}{2}}l, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} & u^{-\frac{1}{2}}\mathbb{E}^{\partial}_{0,u}\big(|F(X) - F\circ\Theta_{\tau_0}(X)|\mathbb{1}_{\tau_0\geq au \text{ or } h\geq b}\big) \\ \leq\ & \big(2\sup(F)\big)\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}a^{-\frac{1}{2}} + \frac{u^{\frac{1}{2}}}{b} + c_1\mathbf{n}(h\geq b)\right), \end{aligned}$$

thus we deduce

$$\limsup_{u\to 0} u^{-\frac{1}{2}}\mathbb{E}^{\partial}_{0,u}\big(|F(X) - F\circ\Theta_{\tau_0}(X)|\big) \leq \big(2\sup(F)\big)\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}a^{-\frac{1}{2}} + c_1\mathbf{n}(h\geq b)\right).$$

The lim sup is bounded by this expression, a and b being any positive constant. Letting a and b go to infinity shows that

$$\lim_{u\to 0} u^{-\frac{1}{2}}\mathbb{E}^{\partial}_{0,u}\big(|F(X) - F\circ\Theta_{\tau_0}(X)|\big) = 0.$$

• Next, we just need to prove that $u^{-\frac{1}{2}}\mathbb{E}^{\partial}_{0,u}(F \circ \Theta_{\tau_0}(X))$ has a limit when u goes to zero, and that this limit is $c_1\mathbf{n}(F(X))$, in order to get that $\mathbf{n}'$ is well-defined and equal to $c_1\mathbf{n}$.

The calculation is similar to the one above, that we did with $\mathbb{1}_{h\geq b}$ instead of F. Here again, the Markov property gives us:

$$u^{-\frac{1}{2}}\mathbb{E}^{\partial}_{0,u}(F \circ \Theta_{\tau_0}(X)) \;=\; u^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{P}_{0,u}(X_{\tau_0} \in dx)x^{\frac{1}{6}}f_F(x),$$

where the function $f_F : x \to x^{-\frac{1}{6}}\mathbb{E}^{\partial}_{x,0}(F(X))$ is bounded and has limit $f_F(0) = \mathbf{n}(F(X))$ at zero. We thus have:

$$u^{-\frac{1}{2}}\mathbb{E}^{\partial}_{0,u}(F \circ \Theta_{\tau_0}(X)) \;\to_{u\to 0}\; \mathbb{E}_{0,1}\big(X_{\tau_0}^{\frac{1}{6}}\big)f_F(0) = c_1\mathbf{n}(F(X)),$$

and the theorem is proved. □

The second new expression we get is different, this time the measure is given as a mixture and not as a limit. Recall that the probability measure $Q_{u;0}$ has been defined in (2.4.19).

Proposition 3. *The measure* $\mathbf{n}'$ *is also given by the expression:*

$$\mathbf{n}'\big(F(X)\big) = \frac{3}{2\pi}\int_{\mathbb{R}_+} u^{-\frac{3}{2}}Q_{u;0}\big(F(\hat{X})\big)du, \tag{2.5.1}$$

where $(\hat{X}_t)_{0\leq t\leq \zeta}$ *is defined by* $\hat{X}_t = X_{\zeta - t}$.

The price to pay is that we need to consider the time-reversed excursions and to use the laws $Q_{u;0}$ instead of $\mathbb{P}^{\partial}_{0,u}$. That is, the probability transitions of the excursions are no more the ones of the Langevin process, killed at zero, they become the $\overline{h}_0$-transforms of these, as written in (2.4.19). This makes the formula hard to use, and indeed we couldn't use it for any calculation yet. We still hope that this formula could help the study and understanding of the process, and thus help for the calculation of some distributions associated to the process.

Proof. This proposition is a consequence of the material developed in Section 4.2. Indeed, we have:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}'(F(X)) &= \lim_{u\to 0} u^{-\frac{1}{2}}\mathbb{E}^{\partial}_{0,u}(F(X)) \\
&= \lim_{u\to 0} u^{-\frac{3}{2}}\int_{\mathbb{R}_+} Q_{u;v}(F(X))\varphi(u,v)dv \qquad \text{from (2.4.14)} \\
&= \lim_{u\to 0}\int_{\mathbb{R}_+} \frac{3}{2\pi}\frac{v^{\frac{3}{2}}}{u^3+v^3}Q_{v;u}(F(\hat{X}))dv \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{3}{2\pi}v^{-\frac{3}{2}}Q_{v;0}(F(\hat{X}))dv,
\end{aligned}$$

where in the third line, we wrote the expression of φ and used (2.4.13). $\square$

2.6 Appendix

Proof of Lemma 3. The first part of the lemma is just a summary of known results, the case $x = 0$ is nothing else that the formula (2.4.4) written for the killed process (as mentioned just after the formula), while the general case is given by Gor′kov in [16] and Lachal in [23]. In this article Lachal also underlines that taking $x = 0$ in (2.4.15) does yield (2.4.16).

For the second part we first prove that Φ_0 and h are well-defined and continuous [6]. For this we just give rough bounds and use the theorem of dominated convergence and the theorem of derivation under the integral. The main technical difficulty stems from the number of variables.

We have

$$p_t(x, u; 0, v) = \frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} \exp\big(- R(x, u, v, t)\big),$$

where $R(x, u, v, t)$ is the quotient:

$$\begin{aligned} R(x, u, v, t) &= \frac{6}{t^3}(x + tu)^2 + \frac{6}{t^2}(x + tu)(v - u) + \frac{2}{t}(v - u)^2 \\ &= \frac{1}{t^3}\Big[\frac{1}{2}(3x + tu + 2tv)^2 + \frac{3}{2}(x + tu)^2\Big]. \end{aligned}$$

The quotient R is nonnegative.

Let (x_0, u_0, v_0) be in $D \times \mathbb{R}$. We search for a neighborhood of (x_0, u_0, v_0) (in $D \times \mathbb{R}$) on which the integrand is bounded by an integrable function (of t). This will prove that Φ_0 is well-defined on this neighborhood and continuous at (x_0, u_0, v_0). We distinguish two cases:

1) $x_0 \neq 0$: Then $R(x, u, v, t)$ is equivalent to $\frac{6x_0^2}{t^3}$ in the neighborhood of $(x_0, u_0, v_0, 0)$, thus it is bounded below by $\frac{5x_0^2}{t^3}$ on a $V \times]0, \varepsilon]$, where V is a neighborhood of (x_0, u_0, v_0) and ε a strictly positive number.

On V, $p_t(x, u; 0, v)$ is bounded above by the function

$$\mathbb{1}_{]0,\varepsilon]}(t)\frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} \exp\Big(- \frac{5x^2}{t^3}\Big) + \mathbb{1}_{]\varepsilon,\infty[}(t)\frac{\sqrt{3}}{\pi t^2},$$

which is integrable.

2) $x_0 = 0$: Then $u_0 > 0$. On a neighborhood V of $(0, u_0, v_0)$ we have $u > \frac{2u_0}{3}$, thus we have

$$R(x, u, v, t) \geq \frac{3}{2t^3}(x + tu)^2 \geq \frac{u_0^2}{t},$$

and thus the function $p_t(x, u; 0, v)$ is bounded above by

$$\frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} \exp\big(- \frac{u_0}{t}\big),$$

6. Note that $\Phi(x, u; y, v) = \Phi_0(x - y, u; v)$.

which is integrable.

We thus proved the continuity of Φ_0. A similar method proves that Φ_0 is infinitely differentiable. To get a continuity result on h, we will need some bounds for $\Phi_0(x, u; v)$, but only for $v > 0$.

For $v > 0$, we have $R(x, u, v, t) \geq \frac{3v^2}{2t}$, thus we have:

$$\begin{aligned}\Phi_0(x, u; v) &\leq \int_0^\infty \frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} \exp\Big(-\frac{3v^2}{2t}\Big) dt \\ &\leq \frac{2\sqrt{3}}{3\pi} v^{-2}.\end{aligned}$$

If (x_0, u_0, v_0) is a given point in $E = \mathbb{R}_+^* \times D$, then in the neighborhood of this point we have $v > \frac{v_0}{2}$ and we deduce:

$$\frac{\mu^{\frac{3}{2}}}{\mu^3 + 1} \Phi_0(x, u; \mu v) \leq \frac{8\sqrt{3}}{3\pi} \frac{\mu^{-\frac{1}{2}} v^{-2}}{\mu^3 + 1},$$

which, considered as a function of μ, is integrable on $\mathbb{R}_+$.

The function h is thus well-defined and continuous.

We now study the behavior of h when v is small.

$$\begin{aligned}\frac{1}{v} h_v(x, u) &= \Phi_0(x, u; v) - \frac{3}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\mu^{\frac{3}{2}}}{\mu^3 + 1} \Phi_0(x, u; \mu v) d\mu \\ &= \Big[\Phi_0(x, u; 0) - \frac{3}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\mu^{\frac{3}{2}}}{\mu^3 + 1} \Phi_0(x, u; \mu v) d\mu\Big] + O(v) \\ &= \mathbb{E}\big[\Phi_0(x, u; 0) - \Phi_0(x, u; v\xi)\big] + O(v),\end{aligned}$$

where ξ is a random variable with law the probability measure $\dfrac{3}{2\pi} \dfrac{\mu^{\frac{3}{2}}}{\mu^3 + 1} d\mu$. We next observe that:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\Phi_0(x, u; 0) - \Phi_0(x, u; v\xi)\big] &= -\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{P}(v\xi \geq \mu) \frac{\partial \Phi_0}{\partial v}(x, u; \mu) d\mu \\ &= v^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}_+} f_v(\mu) d\mu,\end{aligned}$$

where we have written $f_v(\mu) = -v^{-\frac{1}{2}} \mathbb{P}(\xi \geq \mu v^{-1}) \frac{\partial \Phi_0}{\partial v}(x, u; \mu)$.

But the probability $\mathbb{P}(\xi \geq a)$ is equivalent to $\frac{3}{\pi} a^{-\frac{1}{2}}$ when a goes to infinity, and bounded by the same $\frac{3}{\pi} a^{-\frac{1}{2}}$ for any a. On the one hand we deduce that the continuous functions f_v converge weakly to the function $f_0 : \mu \to -\dfrac{3}{\pi} \mu^{-\frac{1}{2}} \dfrac{\partial \Phi_0}{\partial v}(x, u; \mu)$ when v goes to zero, on the other hand that $|f_v| \leq |f_0|$. We just need to prove that f_0 is integrable with respect to the Lebesgue measure. We have:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \Phi_0}{\partial v}(x,u;v) &= -\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial p_t}{\partial v}(x,u;0,v)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \Big(\frac{6x}{t^2} + \frac{2u}{t} + \frac{4v}{t}\Big) p_t(x,u;0,v)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{2\sqrt{3}}{\pi t^4}(3x+tu+2tv)\exp\big(-R(x,u,v,t)\big)dt.
\end{aligned}$$

On the one hand, we have :

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{\partial \Phi_0}{\partial v}(x,u;v)\Big| \\
\leq\ & 3x\int_{\mathbb{R}_+} \frac{2\sqrt{3}}{\pi t^4}\exp\Big(-\frac{3}{2t^3}(x+tu)^2\Big)|u+2v|\int_{\mathbb{R}_+} \frac{2\sqrt{3}}{\pi t^3}\exp\Big(-\frac{3}{2t^3}(x+tu)^2\Big) \\
\leq\ & (A+Bv),
\end{aligned}$$

where A and B depend only on x and u.

On the other hand, we have:

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{\partial \Phi_0}{\partial v}(x,u;v)\Big| \\
\leq\ & \frac{6\sqrt{3}x}{\pi}\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{t^4}\exp\Big(-\frac{3v^2}{2t}\Big) + \frac{(2u+4v)\sqrt{3}}{\pi}\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{t^3}\exp\Big(-\frac{3v^2}{2t}\Big) \\
\leq\ & Cv^{-7} + D(u+2v)v^{-5},
\end{aligned}$$

where C and D are constants.

Let us gather the results. The function $|f_0|$ is bounded by a $O(\mu^{-\frac{1}{2}})$ in the neighborhood of zero and bounded by a $O(\mu^{-3})$ in the neighborhood of infinity, thus it is integrable. $\square$

Chapter 3

Langevin processes reflected on a partially elastic boundary I

Abstract

Consider a Langevin process, that is an integrated Brownian motion, constrained to stay in $[0, \infty)$ by a partially elastic boundary at 0. If the elasticity coefficient of the boundary is greater than or equal to $c_{crit} = \exp(-\sqrt{\pi}/3)$, bounces will not accumulate in a finite time when the process starts from the origin with strictly positive velocity. We will endeavor to show that there exists then a unique entrance law from the boundary with zero velocity, despite the immediate accumulation of bounces. This result of uniqueness is in sharp contrast with the literature on deterministic second order reflection. Our approach uses certain properties of real-valued random walks and a notion of spatial stationarity which may be of independent interest.

Résumé

Considérons un processus de Langevin, c'est-à-dire un mouvement brownien intégré, contraint à rester dans $[0, \infty)$ par une frontière partiellement élastique en 0. Si le coefficient d'élasticité de la frontière est supérieur ou égal à $c_{crit} = \exp(-\sqrt{\pi}/3)$, les rebonds ne s'accumuleront pas en temps fini si le processus part de l'origine avec une vitesse strictement positive. Nous nous efforcerons de montrer qu'il existe une unique loi d'entrée depuis la frontière avec vitesse nulle, malgré l'accumulation immédiate des rebonds. Ce résultat d'unicité est en fort contraste avec la littérature sur les réflexions au second ordre déterministe. Notre approche utilise certaines propriétés des marches aléatoires à valeurs réelles et une notion de stationnarité spatiale, qui pourrait avoir un intérêt propre.

3.1 Introduction

Imagine a deterministic particle evolving in $\mathbb{R}_+$, started from 0, submitted to an external force f, and constrained by a partially elastic boundary at the origin. We write $x(t)$ for the position of the particle and we consider the following equations of motion:

$$(SOR) \qquad \begin{cases} x(t) &= x(0) + \displaystyle\int_0^t \dot{x}(s)\mathrm{d}s \\ \dot{x}(t) &= \dot{x}(0) + \int_0^t f(s)\mathrm{d}s - (1+c)\sum_{0<s\leq t} \dot{x}(s-)\mathbb{1}_{x(s)=0}, \end{cases}$$

where the velocity $\dot{x}$ is càdlàg. The first equation states that x is continuous and has a right-derivative, $\dot{x}$.

The coefficient $c > 0$ is the elasticity coefficient of the boundary: after a bounce, the boundary restores a portion c of the incoming speed. The couple $(x(0), \dot{x}(0))$ is called the starting condition, while $x(0)$ is the starting position and $\dot{x}(0)$ the starting velocity.

Equations (SOR) describe the so-called second order reflection problem. There is a large literature on the subject. To mention some names, Bressan in 1960 [9], Percivale in 1985 [32], Schatzman in 1998 [37], or Ballard in 2000 [2]. An important feature is that in the case of an analytic force f, there is existence and uniqueness to the equations (SOR) for any initial condition, but when f is not analytic (even if it is $\mathcal{C}^\infty$), uniqueness may fail.

The main difficulty in second order reflection comes from the possibility for bounces to accumulate, in which case the sum in the equation involves infinitely many terms. We distinguish two problems: First, bounces may accumulate just before a finite time $t > 0$. Second, when the particle starts from zero position with zero velocity (initial condition $(0,0)$), bounces may accumulate just after the starting time 0.

In this paper we are interested in Equations (SOR) when the external force f is random and given by a white noise. A realization of f will *a fortiori* not be analytic and we will not try to work on a fixed realization. The first observation is that outside the boundary, the velocity of the particle behaves like a Brownian motion, hence the particle evolves like a free Langevin process (i.e the integrated Brownian motion). A consequent study about the free Langevin process in general can be found in Lachal [26]. Bect mentioned the reflection and bounds accumulation problems for particles that can be excited by a white noise in his thesis ([3], see part III.4). For the reader interested in the problem of a Langevin process reflected at a totally inelastic boundary, that is $c = 0$, we refer to Bertoin [4, 5] and Jacob [21].

Let us return to consider (SOR) for f a white noise and $c > 0$. Then the problem of accumulation of bounces just before a finite time $t > 0$ is simple enough: We shall see that bounces accumulate if and only if the elasticity coefficient is less than the critical coefficient $c_{crit} = \exp(-\pi/\sqrt{3})$. However the question of starting with zero position and zero velocity is more fastidious. We focus on the critical and supercritical cases, the study of the subcritical case being the center of interest of a forthcoming paper.

Our main result is the following. For $c \geq c_{crit}$, the reflected Langevin process starting from the origin with a speed $v > 0$ converges in law, when v goes to 0, to a non-degenerate process. Moreover, the law of the process yields the unique law of a solution to the equations (SOR) with initial condition $(0, 0)$.

We observe in this introduction that these results are fairly simple for the particular case $c = 1$ (perfectly elastic boundary) because a reflected Langevin process can then be constructed from the free Langevin process Y by taking its absolute value $|Y|$. However there is no such construction when the elasticity coefficient is $c \neq 1$.

Our method is to focus on the velocities of the process at the bouncing times. A crucial observation is that the sequence of their logarithms is a random walk. This enables us to use technics of renewal theory for random walks, including results about its associated ladder height process and the law of its overshoot.

Next section is devoted to the preliminaries. In Subsection 3.2.2, we give some background on the Langevin process, we characterize the phase transition at $c = c_{crit}$, and we illustrate the three different regimes (subcritical, supercritical, critical). In Subsection 3.2.3, we define a notion of spatial stationarity, in an abstract context. We obtain a convergence result for spatially stationary processes, stated as Lemma 5 and proved in the Appendix. Then, Section 3.3 starts with the statement of our main theorem and its important consequences. Section 3.3.1 uses renewal theory and Lemma 5 to construct a spatially stationary process and reduce the proof of the main theorem to that of Lemma 7. Section 3.3.2 handles this proof in the supercritical case, thanks to an explicit construction [1] of the spatially stationary random walk. However this construction does not hold in the critical case, and Section 3.3.3 completes then the proof, thanks to a disintegration formula [1] for the spatially stationary random walk.

3.2 Preliminaries

3.2.1 Notations

The (free) Kolmogorov process $(Y, \dot{Y})$ with starting position x and starting velocity v – sometimes, we will also say with starting condition (x, v) – is defined by

$$\begin{cases} Y_t &= x + \int_0^t \dot{Y}_s \mathrm{d}s \\ \dot{Y}_t &= v + B_t, \end{cases}$$

where B is a standard Brownian motion. Its first coordinate Y is called the (free) Langevin process. Before writing the second order reflection equations for the Langevin process, we introduce $D = (\{0\} \times \mathbb{R}_+^*) \cup (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ and $D^0 := D \cup \{(0, 0)\}$. Our working space is $\mathcal{C}$,

1. These two constructions in particular may be of independent interest.

the space of càdlàg trajectories $(x, \dot{x}) : [0, \infty) \to D^0$, which satisfy

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(s)\mathrm{d}s.$$

This space is endowed with the $\sigma-$algebra generated by the coordinate maps and with the topology induced by the following injection:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \to & \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}(\mathbb{R}_+) \\ (x, \dot{x}) & \mapsto & \big(x(0), \dot{x}\big), \end{array}$$

where $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ is the space of càdlàg trajectories on $\mathbb{R}_+$, equipped with Skorohod topology. We denote by $(X, \dot{X})$ the canonical process and by $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ its natural filtration, satisfying the usual conditions of right continuity and completeness. Besides, by a slight abuse of notation, when we define a probability measure P, we also write P for the expectation under this probability measure. When f is a measurable functional and A an event, we also write $P(f, A)$ for the quantity $P(f\mathbb{1}_A)$.

For any $(x, v) \in D^0$, the second order reflection of the Langevin process starting from position x and velocity v leads to the following equation:

$$(SOR) \qquad \begin{cases} X_t &= x + \displaystyle\int_0^t \dot{X}_s \mathrm{d}s \\ \dot{X}_t &= v + B_t - (1+c)\sum_{0<s\leq t} \dot{X}_{s-} \mathbb{1}_{X_s=0}, \end{cases}$$

where B is a Brownian motion. Problems of existence and uniqueness of second order reflection equations can only arise around the point $(0,0)$. For any $(x, v) \in D$, we write $\mathbb{P}^c_{x,v}$ for the solution to equations (SOR), *killed at its first hitting time of* $(0,0)$. This process is a well-defined strong Markov process, and will be called the killed reflected Langevin process, or more concisely the reflected Langevin process. We will almost exclusively consider the case when the starting position is 0, and write $\mathbb{P}^c_v$ for $\mathbb{P}^c_{0,v}$ (with $v > 0$).

Let us write $\zeta_0 = 0$ and $\zeta_{n+1} := \inf\{t > \zeta_n : X_t = 0\}$ for the sequence of successive hitting times of zero (see Figure 3.1 below for an illustration of the notations). We call an *arch* a part of the path included between two consecutive hitting times of zero. Then, under $\mathbb{P}^c_v$, the killed reflected process X behaves like Y until the first return time to zero ζ_1, that is the first arch of Y and X have the same law, $(Y_t)_{\zeta_0 \leq t \leq \zeta_1} \stackrel{d}{=} (X_t)_{\zeta_0 \leq t \leq \zeta_1}$. Then the second arch of the killed reflected process, $(X_t)_{\zeta_1 \leq t \leq \zeta_2}$, has the same law as the first arch of a Langevin process starting with velocity $\dot{X}_{\zeta_1} := -c\dot{X}_{\zeta_1^-}$. We construct in the same way the sequence of successive arches of X. We also write V_n^-, and V_n for the speed of the process just before this n-th bounce, and for the speed of the process just after this n-th bounce, respectively, so that we have $V_n = \dot{X}_{\zeta_n} = -c\dot{X}_{\zeta_n^-} = -cV_n^-$. Please note that the event that for some n, we have $V_n = 0$, has probability 0. We call time of accumulation of

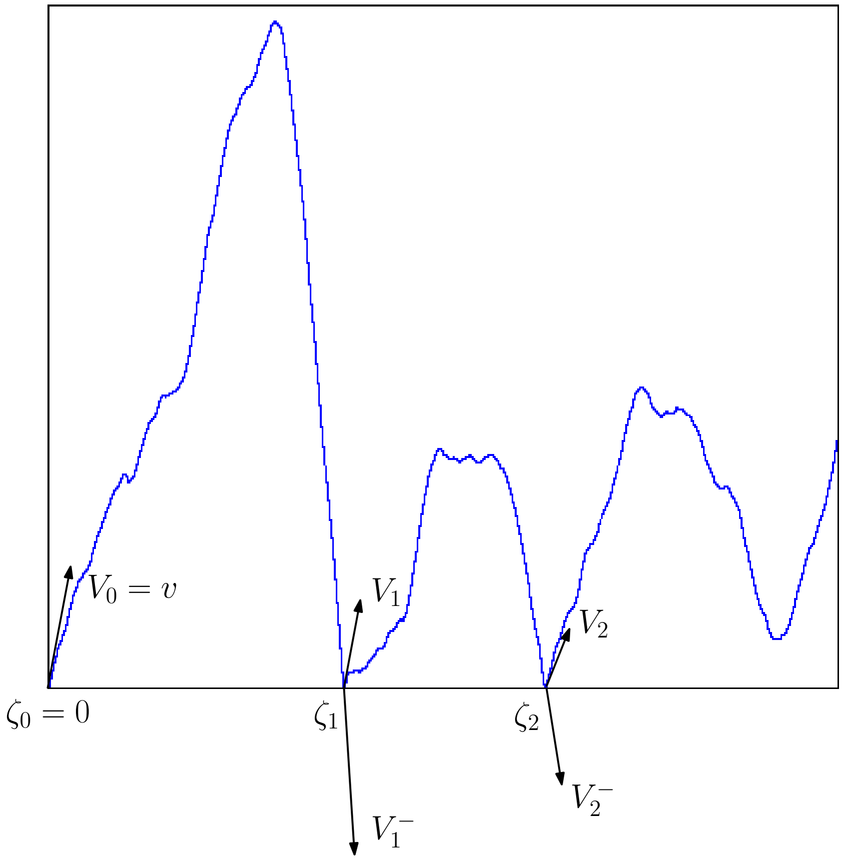

Figure 3.1: First arches of a killed reflected Langevin process

bounces the time $\zeta_\infty := \sup(\zeta_n) \in]0, \infty]$. It coincides almost surely with the hitting time of $(0, 0)$. Figure 3.1 below shows two complete arches and the beginning of a third one.

In the particular case $c = 1$, the killed reflected Langevin process has the same law as the absolute value of the free Langevin process. Then, the sequence $(\zeta_n, V_n)_{n\geq 0}$ coincides with the sequence of the successive passage times to zero and absolute value of the speed of the process at this times, for the free Langevin process. This sequence has been studied by McKean [31]. He shows that it is a homogeneous Markov chain with explicit transition probabilities. Lachal furthers this study in [25] by giving explicit formulas for the law of (ζ_n, V_n) for a fixed n. It is interesting to note that Wong also studies in [40, 41] the passage times to zero for a certain stationary process, which is obtained from the Langevin process by an exponential change of scale in both time and space. The passage times to zero of this stationary process are closely related to a certain stationary random walk that we will introduce later in this Chapter. However, this process shall not be confused with the "stationary Langevin process" introduced in Chapter 2. The two processes do not seem to be directly related.

In the next subsection, we present essentially the same results as those of McKean, but stated in the general case $c \neq 1$. The infiniteness of ζ_∞ is then no more guaranteed.

3.2.2 The sequence $(\zeta_n, V_n)_{n\geq 0}$

Lemma 4. *1. The law of $(\zeta_1, V_1/c)$ under $\mathbb{P}_1^c$ is given by*

$$\frac{1}{\mathrm{d}s\mathrm{d}v}\mathbb{P}_1^c\left((\zeta_1, V_1/c) \in (\mathrm{d}s, \mathrm{d}v)\right) = \frac{3v}{\pi\sqrt{2}s^2}\exp(-2\frac{v^2-v+1}{s})\int_0^{\frac{4v}{s}} e^{-\frac{3\theta}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\pi\theta}}. \quad (3.2.1)$$

2. *Under $\mathbb{P}_v^c$, the sequence $\left(\frac{\zeta_{n+1}-\zeta_n}{V_n^2}, \frac{V_{n+1}}{V_n}\right)_{n\geq 0}$ is i.i.d. The common law of its marginals, also independent of v, is that of (ζ_1, V_1) under $\mathbb{P}_1^c$.*

3. *In particular, the sequence $\ln(V_n)$ is a random walk. The density of its step distribution $\ln(V_1/V_0)$ under $\mathbb{P}_v^c$ does not depend on v and is given by:*

$$\frac{1}{\mathrm{d}v}\mathbb{P}_1^c(\ln(V_1) \in \mathrm{d}v) = \frac{3}{2\pi}\frac{e^{\frac{5}{2}(v-\ln c)}}{1+e^{3(v-\ln c)}}\mathrm{d}v. \quad (3.2.2)$$

In particular $\ln(V_1)$ has finite variance and expectation

$$\mathbb{P}_1^c(\ln V_1) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln c.$$

4. *We have, when $t \to \infty$,*

$$\mathbb{P}_1^c(\zeta_1 > t) \sim c' t^{-\frac{1}{4}}, \quad (3.2.3)$$

where c' is an explicit positive constant.

Proof. The three first points are essentially results given by McKean [31] or direct consequences of these. And the last one is similar to a result of Goldman, except that he considers the process with zero starting velocity and nonzero starting position [15]. We nonetheless provide the following proofs.

The second point comes from the observation that the variable $(\zeta_n - \zeta_{n-1})/(V_{n-1})^2$ (resp. V_n/V_{n-1}) is equal to the duration of the $n-$th arch renormalized to start with speed one (resp. to the absolute value of the speed of the process just before its return time to zero, for this renormalized arch). More precisely:

Recall that, conditionally on $V_n = v$, the process $(X_{(t+\zeta_n)\wedge\zeta_{n+1}})_{t\geq 0}$ is independent of $(X_{t\wedge\zeta_n})_{t\geq 0}$ and has the same law as $(X_{t\wedge\zeta_1})_{t\geq 0}$ under $\mathbb{P}_v^c$, thus $(\zeta_{n+1}-\zeta_n, V_{n+1}/c)$ is independent of $(\zeta_k, V_k)_{k\leq n}$ has the same law as $(\zeta_1, \frac{1}{c}V_1)$ under $\mathbb{P}_v^c$. It follows that the variable $((\zeta_{n+1}-\zeta_n)/(V_n)^2, V_{n+1}/V_n)$ is independent of $(\zeta_k, V_k)_{k\leq n}$ and has the same law as (ζ_1, V_1) under $\mathbb{P}_1^c$ (conditionally on $V_n = v$, but this conditioning can simply be removed). The statement follows.

In the third point, we propose one method to calculate that the expectation of $\ln V_1$ is $\pi/\sqrt{3} + \ln c$. The method is to deduce it by taking the derivative at 0 of the following formula:

$$\mathbb{P}_1^c\left(\left(\frac{V_1}{c}\right)^x\right) = \frac{1}{2\cos(\frac{x+1}{3}\pi)} \text{ for } x < 1/2. \tag{3.2.4}$$

To prove this formula, consider a fixed $x < 1/2$. We know $\mathbb{P}_1^c(V_1/c \in \mathrm{d}v) = \frac{3}{2\pi}\frac{v^{\frac{3}{2}}}{1+v^3}\mathrm{d}v$. Hence,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_1^c\left(\left(\frac{V_1}{c}\right)^x\right) &= \frac{3}{2\pi}\int_0^\infty \frac{t^{x+3/2}}{1+t^3}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{x}{3}-\frac{1}{6}}}{1+t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

As $\cos(\frac{x+1}{3}\pi) = \sin((\frac{x}{3}+\frac{5}{6})\pi)$, in order to get (3.2.4) we just have to prove

$$\int_0^\infty \frac{t^{y-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi y)},$$

where $y = \frac{x}{3}+\frac{5}{6}$ is in $(0,1)$. Now, we have

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{t^{y-1}}{1+t}\mathrm{d}t &= \int_0^1 t^y(1-t)^{1-y}\mathrm{d}t \\ &= B(y, 1-y) \\ &= \frac{\Gamma(y)\Gamma(1-y)}{\Gamma(1)} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi y)}.\end{aligned}$$

where B and Γ are the usual Beta and Gamma function, respectively.

In the fourth point, we can get Formula (3.2.3) directly from (3.2.1). Starting from the observation that

$$e^{-\frac{6v}{s}}\int_0^{\frac{4v}{s}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \leq \int_0^{\frac{4v}{s}} e^{-\frac{3\theta}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \leq \int_0^{\frac{4v}{s}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\pi\theta}},$$

we get that the density (3.2.1) is between

$$\frac{6\sqrt{2}}{\pi^{\frac{3}{2}}}v^{\frac{3}{2}}s^{-\frac{5}{2}}\exp\left(-\frac{2v^2+4v+2}{s}\right)$$

and

$$\frac{6\sqrt{2}}{\pi^{\frac{3}{2}}}v^{\frac{3}{2}}s^{-\frac{5}{2}}\exp\left(-2\frac{v^2-v+1}{s}\right).$$

Write

$$\frac{1}{\mathrm{d}s\mathrm{d}v}\mathbb{P}_1^c\left((\zeta_1, V_1/c) \in (\mathrm{d}s, \mathrm{d}v)\right) = \frac{6\sqrt{2}}{\pi^{\frac{3}{2}}} v^{\frac{3}{2}} s^{-\frac{5}{2}} \exp\left(\frac{-2v^2 + vK(s,v)}{s}\right),$$

where $K(s,v)$ is continuous and bounded. Integrating this with respect to v and using the change of variable $w = v^2/s$, we get

$$\frac{1}{\mathrm{d}s}\mathbb{P}_1^c\left(\zeta_1 \in \mathrm{d}s\right) = \frac{3\sqrt{2}}{\pi^{\frac{3}{2}}} s^{-\frac{5}{4}} \int_{\mathbb{R}_+} w^{\frac{1}{4}} \exp\left(-2w + K\left(s, \sqrt{sw}\right)\sqrt{w/s}\right) \mathrm{d}w.$$

By dominated convergence, the integral converges to $\int_{\mathbb{R}_+} w^{\frac{1}{4}} \exp(-2w)\mathrm{d}w$ when s goes to ∞. Then just integrate on $s \in [t, \infty)$ to get (3.2.3) with the constant

$$c' = \frac{12\sqrt{2}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}_+} w^{\frac{1}{4}} \exp(-2w)\mathrm{d}w = \frac{3\Gamma(1/4)}{2^{3/4}\pi^{3/2}}.$$

□

From this Lemma we deduce the following important result:

Corollary 5. *The time of accumulation of bounces ζ_∞ is:*

finite $\mathbb{P}_v^c$−almost surely if $c < \exp(-\pi/\sqrt{3})$,
infinite $\mathbb{P}_v^c$−almost surely if $c \geq \exp(-\pi/\sqrt{3})$.

We thus call $c_{crit} := \exp(-\pi/\sqrt{3})$ the critical elasticity coefficient. We call the case $c > c_{crit}$ the supercritical regime, the case $c < c_{crit}$ the subcritical regime, the case $c = c_{crit}$ the critical regime.

Proof. We may express ζ_∞ as the series:

$$\zeta_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_n - \zeta_{n-1}}{(V_{n-1})^2}(V_{n-1})^2.$$

For $c < \exp(-\pi/\sqrt{3})$, the law of large numbers tells that the sequence $\frac{1}{k}\ln(V_k)$ converges to $\ln(c) + \pi/\sqrt{3} < 0$ a.s. On the other hand, it follows from (3.2.3) that the expectation of $(\ln(\zeta_1))^2$ is finite [2]. Thus, for any fixed $\varepsilon > 0$ there are a.s. only a finite number of k such that $\ln((\zeta_k - \zeta_{k-1})/(V_{k-1})^2)$ is larger than εk. We deduce an a. s. exponential decay for the variables $\zeta_{k+1} - \zeta_k$. *A fortiori* ζ_∞ is a. s. finite.

Take now $c \geq \exp(-\pi/\sqrt{3})$. For $c > \exp(-\pi/\sqrt{3})$, the random walk $\ln V_n$ has a positive drift and is transient. Thus the sequence V_n is diverging to $+\infty$. As $(\zeta_n - \zeta_{n-1})/(V_{n-1})^2$ is independent of V_{n-1} and has a fixed distribution, we deduce that ζ_∞ is infinite. For $c = \exp(-\pi/\sqrt{3})$, the step distribution has zero expectation and finite variance, thus the random walk is recurrent (from the central limit theorem). Then the sequence V_n is recurrent, but it is still not converging to zero, which is enough to conclude in the same way that ζ_∞ is infinite. □

2. This result was also stressed by McKean in [31]

Figures 3.2, 3.3 and 3.4 below give illustrations of the different regimes, obtained by a basic simulation. We have drawn the killed reflected Langevin process with three different values of c for the same underlying Brownian motion and the same starting velocity. For $c = 0.1$, that is in the subcritical case, the bounds accumulate (here at about time 7000). For $c = 0.25$, that is in the supercritical case, we observe bigger and bigger arches. Finally, in the critical case $c = c_{crit}$, even after a long time, we still observe very big and very small arches (see the bouncing times ζ_9, ζ_{10}, ζ_{11}).

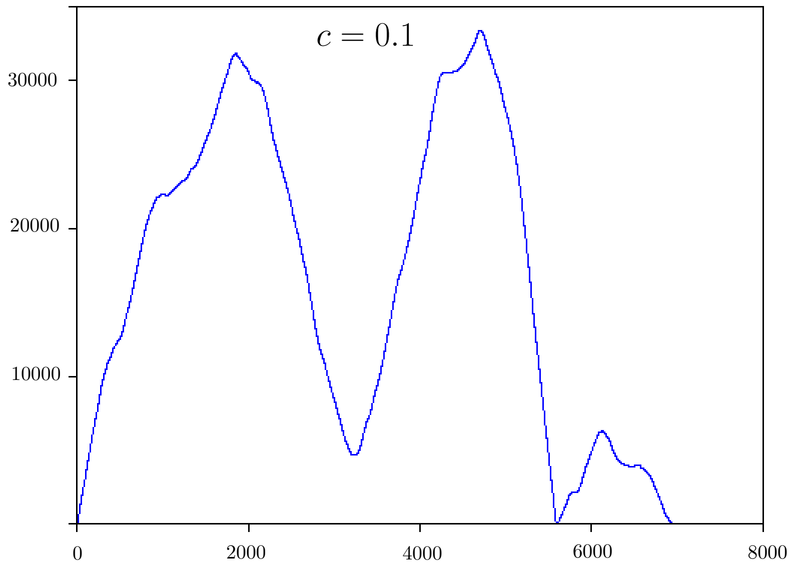

Figure 3.2: Killed reflected Langevin process for elasticity coefficient $c = 0.1 < c_{crit}$

From now, we suppose $c \geq c_{crit}$. Then, for any $(x, v) \in D$, we have $\zeta_\infty = \infty$ almost surely under $\mathbb{P}^c_{x,v}$. The process is thus defined on $\mathbb{R}_+$ (it is not killed), and we then call it the reflected Langevin process. It is also the unique solution (in the strong sense) of equations (SOR) with starting condition (x, v). A natural question is to ask wether we can define the reflected Langevin process starting from condition $(0, 0)$. The purpose of this work will be to answer positively this question.

Note that the particular case $c = 1$ is trivial, just consider the absolute value of the free Langevin process with initial condition $(0, 0)$. For this process, it is natural to try to describe the instants of bounces and the velocity of the process at these instants. One way to do this, adopted by McKean [31] and Lachal [25], is to define two sequences, the first one corresponding to the successive bounds happening after time 1, the second one to the successive bounds happening before time 1, counted backwardly. This is barely different from considering a single sequence, indexed by $\mathbb{Z}$, where one puts arbitrarily the 0 at the

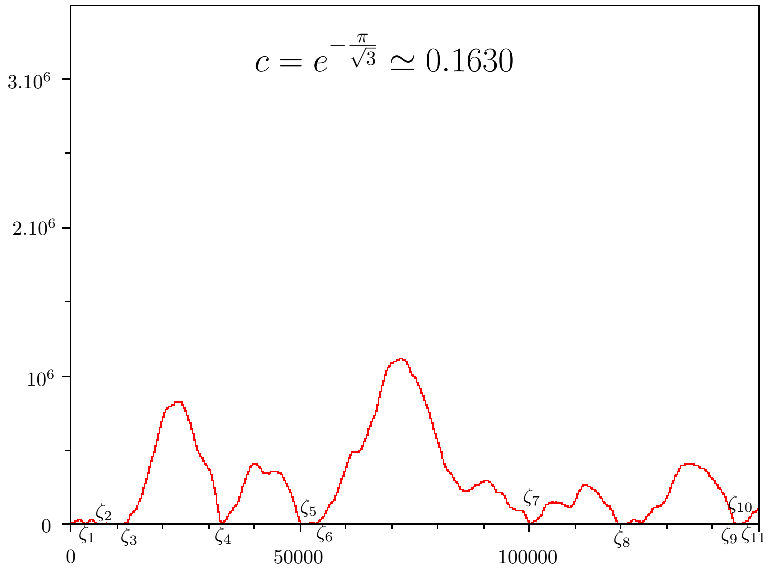

Figure 3.3: (Killed) reflected Langevin process for elasticity coefficient $c = c_{crit} = \exp(-\pi/\sqrt{3})$

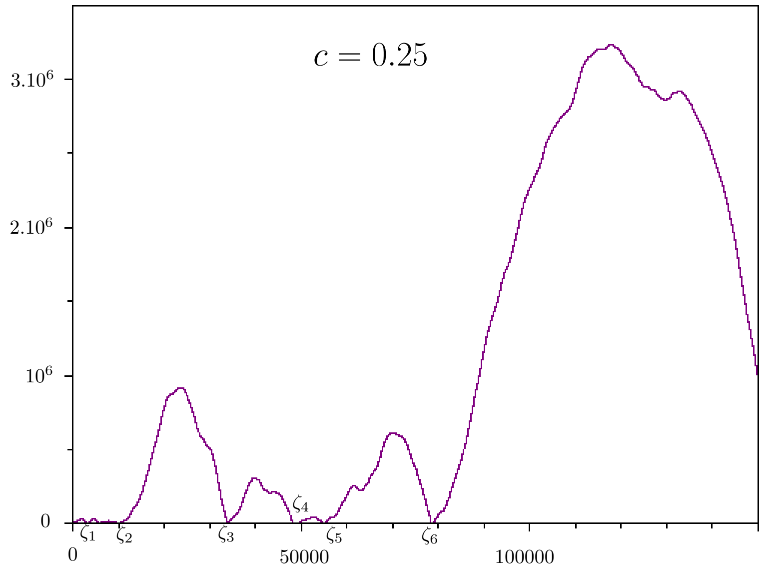

Figure 3.4: (Killed) reflected Langevin process for elasticity coefficient $c = 0.25 > c_{crit}$

last bounce happening before time 1.

In a fairly similar manner, we will get to consider a sequence indexed by $\mathbb{Z}$, and whose 0 will be put at the first bounce for which the speed is greater than 1.

3.2.3 Weak convergence to a spatially stationary process

After these first results on the Langevin process, we give the abstract context for a notion of spatial stationarity and an important lemma that we will need later.

We write Ω for the set of sequences indexed by $\mathbb{Z}$, $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\omega_n^1, \omega_n^2)_{n\in\mathbb{Z}}$, with values in $[-\infty, \infty) \times \mathcal{C}^0$, where $\mathcal{C}^0$ is a topological space with an isolated point $\emptyset$. For now, just consider this space as playing an accessory role that will be understood later. The set Ω is endowed with the usual product topology.

For any real number x we write T_x for the hitting time of (x, ∞) by the first coordinate, that is

$$T_x = T_x(\omega) = \inf\{n \in \mathbb{Z}, \omega_n^1 > x\}.$$

Under all the measures P that we will consider on Ω we will have

$$\lim_{-\infty} \omega_n^1 = -\infty, \ \limsup_{+\infty} \omega_n^1 = +\infty \qquad \text{P-almost surely,}$$

and as a consequence T_x will have values in $\mathbb{Z}$, P-almost surely. We then define a spatial translation operator Θ on Ω, by:

$$\Theta_x(\omega) := (\omega_{n+T_x}^1 - x, \omega_{n+T_x}^2)_{n\in\mathbb{Z}}. \tag{3.2.5}$$

This definition immediately yields a notion of spatial stationarity for the probabilities on Ω:

Definition 5. *We say that a probability P on Ω is spatially stationary if $P \circ \Theta_x = P$ for any $x \in \mathbb{R}$.*

We also write

$$\Omega_+ := \left\{\omega \in \Omega : (\omega_n^1, \omega_n^2) = (-\infty, \emptyset) \text{ for all } n < 0\right\},$$

that we shall think of as the sequences indexed by $\mathbb{N}$. We write $\omega^+ \in \Omega_+$ for the projection of $\omega \in \Omega$ defined by:

$$\omega_n^+ = \begin{array}{ll} (-\infty, \emptyset) & \text{if } n < 0 \\ \omega_n & \text{if } n \geq 0 \end{array}$$

If P is a probability on Ω, we write P_+ for the image probability on Ω_+ by this projection. Finally we write $\Rightarrow$ for the weak convergence on the topological space Ω. The following lemma states a convergence result to a spatially stationary probability measure on Ω, as a consequence of convergence results on Ω_+:

Lemma 5. *Let $(P_v)_{v>0}$ be a family of probability measures on Ω. We suppose that there is a probability Q on Ω_+ such that:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (P_v \circ \Theta_x)_+ \Rightarrow_{v\to 0} Q.$$

Then there exists a unique spatially stationary probability measure P on Ω such that $P_+ = Q$. Moreover, we have

$$P_v \circ \Theta_x \Rightarrow P.$$

The proof of this technical lemma is based on the Kolmogorov existence theorem, but we postpone it to the appendix, while we explain how we can apply it to our case.

3.3 Entering with zero velocity

Recall that we are in the critical or supercritical regime, $c \geq c_{crit}$. Under $\mathbb{P}^c_{x,v}$, write $(S_n)_{n\geq 0}$ for the sequence of the logarithm of the (outgoing) velocity at the successive bounces, defined by $S_n = \ln(V_n)$. From Lemma 4, it is a random walk with step distribution given by (3.2.2) and drift

$$\mu := \mathbb{P}^c_1(S_1 - S_0) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln c = \ln(c/c_{crit}).$$

In the supercritical case $c > c_{crit}$ the drift is strictly positive, while in the critical case $c = c_{crit}$ the step distribution has zero drift and finite variance.

We introduce the (strictly) ascending ladder height process $(H_n)_{n\geq 0}$ associated to the random walk $(S_n)_{n\geq 0}$, that is the random walk with positive jumps defined by $H_0 = S_0$ and $H_k = S_{n_k}$, where $n_0 = 0$ and $n_k = \inf\{n > n_{k-1}, S_n > S_{n_{k-1}}\} \in \mathbb{N}$. In both cases (positive drift, or null drift and finite variance), it is known (see Theorem 3.4 in Spitzer [38]) that the expectation of the step distribution of $(H_n)_{n\geq 0}$, that is $\mu_H := \mathbb{P}^c_1(H_1 - H_0)$, belongs to $(0, \infty)$. The probability law

$$m(\mathrm{d}y) := \frac{1}{\mu_H}\mathbb{P}^c_1(H_1 - H_0 > y)\mathrm{d}y. \tag{3.3.1}$$

is known in renewal theory as being the stationary law of the overshoot (see also Part 3.3.1).

We now state our main theorem and its important corollary:

Theorem 3. *The family of probability measures $(\mathbb{P}^c_v)_{v>0}$ on $\mathcal{C}$ has a weak limit when $v \to 0^+$, which we denote by $\mathbb{P}^c_{0+}$. More precisely, write τ_u for the instant of the first bounce with speed greater than u, that is $\tau_u := \inf\{t > 0, X_t = 0, \dot{X}_t > u\}$. Then the law $\mathbb{P}^c_{0+}$ satisfies the following conditions:*

$$(*) \quad \begin{cases} \lim_{u\to 0^+} \tau_u = 0. \\ \textit{Conditionally on } \dot{X}_{\tau_u} = v, \textit{ the process } (X_{\tau_u+t}, \dot{X}_{\tau_u+t})_{t\geq 0} \textit{ is independent of} \\ (X_s, \dot{X}_s)_{s<\tau_u} \textit{ and has law } \mathbb{P}^c_v. \end{cases}$$

$(**)$ *The law of $\ln(\dot{X}_{\tau_u}/u)$ is m.*

Corollary 6. *Under $\mathbb{P}^c_{0+}$, the process $(X, \dot{X}, B)$, where B is the continuous part of $\dot{X}$, is a solution to (SOR) with initial condition $(0,0)$. Any solution has this same law. In other words, for $c \geq c_{crit}$, there is weak existence and weak uniqueness of solutions to (SOR) with initial condition $X_0 = \dot{X}_0 = 0$.*

Proof of the corollary. Let us introduce a slightly larger working space,

$$\mathcal{C}^* := \{(x_t, \dot{x}_t)_{t>0}, \forall \varepsilon > 0, (x_{\varepsilon+t}, \dot{x}_{\varepsilon+t})_{t\geq 0} \in \mathcal{C}\}.$$

We mention that $\mathcal{C}$ can be seen as a subspace of $\mathcal{C}^*$, by removing time 0 from the trajectories. This inclusion is strict: an element of $\mathcal{C}^*$ is a trajectory (indexed by $\mathbb{R}^*_+$) which does not necessarily have a limit at $0+$. We introduce the following weaker version of the theorem:

> *There exists a law $\mathbb{P}^{c*}_{0+}$ on $\mathcal{C}^*$, satisfying conditions $(*)$ and $(**)$, such that:*
> *For any $u > 0$, the joint law of τ_u and $(X_{\tau_u+t}, \dot{X}_{\tau_u+t})_{t\geq 0}$ under $\mathbb{P}^c_v$ converges weakly, when v goes to 0, to that under $\mathbb{P}^{c*}_{0+}$.*

In this weak version it is implicit that under $\mathbb{P}^{c*}_{0+}$, we have $\tau_u > 0$ a.s. First, this gives sense to conditions $(*)$ and $(**)$. Second, this explains that the convergence in law of the process $(X_{\tau_u+t}, \dot{X}_{\tau_u+t})_{t\geq 0}$ has to be understood in the space $\mathcal{C}$. The theorem and its corollary will both be a consequence from this weak version.

Indeed, consider the canonical process $(X_t, \dot{X}_t)_{t>0}$ under $\mathbb{P}^{c*}_{0+}$. From conditions $(*)$ and the Markov property, we deduce that $(X_t, \dot{X}_t)_{t>0}$ is a strong Markov process with values in D and transitions that of the reflected Langevin process.

It follows that for any $r > 0$, there exists a Brownian motion B^r independant of $\mathcal{F}_r$ and such that, for $t \geq r$,

$$\begin{cases} X_t &= X_r + \displaystyle\int_r^t \dot{X}_s \mathrm{d}s \\ \dot{X}_t &= \dot{X}_r + B^r_{t-r} - (1+c)\sum_{r<s\leq t} \dot{X}_{s-}\mathbb{1}_{X_s=0}. \end{cases}$$

The Brownian motions B^r are linked by $B^r_{t-r} = B^q_{t-q} - B^q_{r-q}$ for $q \leq r \leq t$. We introduce $M_s = B^{1-s}_s,\ 0 \leq s < 1$. For any $t < 1$, we have

$$(M_s)_{0\leq s\leq t} = (B^{1-t}_t - B^{1-t}_{t-s})_{0\leq s\leq t}.$$

Therefore $(M_s)_{0\leq s\leq t}$ is a Brownian motion. It follows that $(M_s)_{0\leq s<1}$ is a Brownian motion. Write M_1 for its limit when s tends to 1. Now, define the process B by

$$B_s = \begin{cases} M_1 - M_{1-s} & ,\ 0 \leq s < 1. \\ M_1 + B^1_{s-1} & ,\ 1 \leq s. \end{cases}$$

It is easy to check that B is a Brownian motion and satisfies $B_t - B_r = B^r_{t-r}$ for $t \geq r$. Hence, for $t \geq r$,

$$\begin{cases} X_t &= X_r + \displaystyle\int_r^t \dot{X}_s \mathrm{d}s \\ \dot{X}_t &= \dot{X}_r + B_t - B_r - (1+c)\sum_{r<s\leq t} \dot{X}_{s-}\mathbb{1}_{X_s=0}. \end{cases} \tag{3.3.2}$$

The increments of $\dot{X}$ are equal to the sum of two terms, on the one side the increments of B, and on the other side, the jumps, which are happening at the bouncing times. Besides, conditions $(*)$ imply $\dot{X}_t \mathbb{1}_{X_t=0} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. That is, the value of $\dot{X}$ at a bouncing time is going to 0 when this time goes to 0. It follows $\dot{X}_t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. Therefore we also have $X_t \to 0$. Consequently, by setting $X_0 = \dot{X}_0 = 0$, we define a process in $\mathcal{C}$. We call its law $\mathbb{P}^c_{0+}$. Now, take again System (3.3.2) and let r go to 0. First, we obtain that the sum of the jumps happening just after the initial time (or in a finite time interval) is finite. Then we deduce that under $\mathbb{P}^c_{0+}$, $(X, \dot{X}, B)$ is a solution to (SOR) with starting condition $(0,0)$.

In summary, we defined a law $\mathbb{P}^c_{0+}$ on $\mathcal{C}$ satisfying conditions $(*)$ and $(**)$, and thus $\tau_u > 0$ and $\tau_u \to 0$ almost surely. Besides, the joint law of τ_u and $(X_{\tau_u+t}, \dot{X}_{\tau_u+t})_{t\geq 0}$ under $\mathbb{P}^c_v$ converges weakly to that under $\mathbb{P}^c_{0+}$. In order to deduce the convergence of $\mathbb{P}^c_v$ to $\mathbb{P}^c_{0+}$, we just need to control what happens on $[0, \tau_u[$. More precisely, it is enough to control the velocity $\dot{X}$. Let us call M_u the sup of $\dot{X}_t$ on $[0, \tau_u[$. It will be enough to prove that when u is small, the variable M_u is small with high probability, uniformly on v small, in the following sense:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists u_0 > 0, \exists v_0 > 0, \forall 0 < u \leq u_0, \forall 0 < v \leq v_0, \quad \mathbb{P}^c_v(M_u \geq \delta) \leq \varepsilon.$$

Start from the basic observation $M_u \leq u + \sup_{s,t\in[0,\tau_u[} |B_t - B_s|$, where B is the underlying Brownian motion. It follows

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^c_v(M_u \geq u+\delta) &\leq \mathbb{P}^c_v(\tau_u \geq \eta) + \mathbb{P}^c_v\left(\sup_{s,t\in[0,\eta)} |B_t - B_s| \geq \delta\right) \\ &\leq \mathbb{P}^c_v(\tau_u \geq \eta) + \varepsilon,\end{aligned}$$

for a well-chosen $\eta > 0$, independent of v. Now, by writing the right side in the form $\mathbb{P}^c_v(\tau_u \geq \eta) - \mathbb{P}^c_{0+}(\tau_u \geq \eta) + \mathbb{P}^c_{0+}(\tau_u \geq \eta) + \varepsilon$, and using $\tau_u \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$, $\mathbb{P}^c_{0+}-$a.s., we get that the following inequality

$$\mathbb{P}^c_v(M_u \geq u+\delta) \quad \leq \quad \mathbb{P}^c_v(\tau_u \geq \eta) - \mathbb{P}^c_{0+}(\tau_u \geq \eta) + 2\varepsilon$$

is satisfied for u small enough. Choose u_0, smaller than δ, such that the inequality is satisfied. Then, from the convergence of the law of τ_{u_0} under $\mathbb{P}^c_v$ to that under $\mathbb{P}^c_{0+}$, we get that for v smaller than some $v_0 > 0$, we have

$$\mathbb{P}^c_v(M_{u_0} \geq 2\delta) \leq 3\varepsilon.$$

Now it is clear that the inequality stays satisfied for $u < u_0$, which ends the proof. The law $\mathbb{P}^c_v$ converges weakly to $\mathbb{P}^c_{0+}$, and the theorem, in its strong version, is proved.

Finally, we should prove the uniqueness in Corollary 6. Consider any solution $(X, \dot{X}, B)$ to (SOR) with starting condition $(0,0)$. If X were not coming back to zero at small times, then there wouldn't be any jumps for $\dot{X}$ at small times, thus X would behave like a Langevin process. But this is not possible as the Langevin process starting with velocity 0 does come back at 0 at arbitrary small times. As a consequence, the process X necessarily satisfies condition $(*)$. Now, the process $(X_{\tau_u+t}, \dot{X}_{\tau_u+t})_{t\geq 0}$ converges in law to $\dot{X}$, thus the law of $(X, \dot{X})$ is an accumulation point of the family $(\mathbb{P}^c_v)_{v>0}$ when $v \to 0$. It must coincide with $\mathbb{P}^c_{0+}$.

□

The rest of the section is devoted to the proof of the theorem in its weak version (see the beginning of the proof of the Corollary). It can be sketched as follows. First, using renewal theory, we get, for any fixed $u > 0$, the convergence of the law of the process $(\dot{X}_{\tau_u+t})_{t\geq 0}$ to a law that can be described in a simple way. Then Lemma 5 allows, in a certain sense, to include negative times in this convergence result. The last step will be to prove that τ_u converges in law to a finite valued random variable.

3.3.1 Convergence of shifted processes

We recall the notation V_n for the (outgoing) velocity at the n-th bounce and S_n for its logarithm, for $n \geq 0$. We also write $\mathcal{N}_n$ for the translated velocity path starting at the n-th bounce and renormalized so as to start with speed one. That is, $\mathcal{N}_n$ is defined by

$$(\mathcal{N}_n(t))_{t\geq 0} := (V_n^{-1}\dot{X}(\zeta_n + V_n^2 t))_{t\geq 0}. \tag{3.3.3}$$

The process $\mathcal{N}_n$ is independent of $(\dot{X}_t)_{0\leq t\leq \zeta_n}$ and has law $\mathbb{P}^c_1$. The knowledge of the process X, or $\dot{X}$, is equivalent to the knowledge of the sequence $(S_n, \mathcal{N}_n)_{n\geq 0}$, or even just $(S_0, \mathcal{N}_0)$. But it is more convenient to first prove convergence results about (translations of) the sequence $(S_n, \mathcal{N}_n)_{n\geq 0}$, then deduce results about X, which we do.

We work with $\mathcal{C}^0 := \mathcal{C} \cup \emptyset$ and we define moreover, for $n < 0$, $(S_n, \mathcal{N}_n) := (-\infty, \emptyset)$, so that the sequence $(S, \mathcal{N}) := (S_n, \mathcal{N}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ lays in Ω_+, in the settings of Section 3.2.3. We call $\mathbf{P}_v$ its law on Ω_+ (or Ω), under $\mathbb{P}^c_v$. We also use the other notations of Section 3.2.3, such as $T_x(S) = \inf\{n, S_n \geq x\}$, which we will simply write T_x, or the spatial translation operator Θ_x, defined by (3.2.5). We now aim at establishing convergence results for the probabilities $\mathbf{P}_v \circ \Theta_x$.

First, observe that under $\mathbf{P}_v$ and for $n \geq 0$, $(S_{n+1}, \mathcal{N}_{n+1})$ is measurable with respect to $(S_n, \mathcal{N}_n)$, and thus $(S, \mathcal{N})$ is entirely determined by $(S_0, \mathcal{N}_0)$, which follows the law $\delta_{\ln v} \otimes \mathbb{P}^c_1$. In other words, there is a deterministic functional F such that $(S_n, \mathcal{N}_n)_{n\geq 0} = F(S_0, \mathcal{N}_0)$, and $\mathbf{P}_v$ is the law on Ω induced by the law $\delta_{\ln v} \otimes \mathbb{P}^c_1$ for $(S_0, \mathcal{N}_0)$. Write now $\mathbf{Q}$ for the law on Ω_+ induced by the law $m \otimes \mathbb{P}^c_1$ for $(S, \mathcal{N})$, where the measure m is the stationary law of the overshoot we introduced earlier, defined by (3.3.1).

Lemma 6. *For any real number x, we have*

$$(\mathbf{P}_v \circ \Theta_x)_+ \Rightarrow_{v\to 0^+} \mathbf{Q}$$

Proof. Consider the ascending ladder height process H defined at the beginning of Section 3.3. It is a random walk with positive jumps and finite expectation. It is nonarithmetic in the sense that its jumping law is not included in $d\mathbb{Z}$ for any $d > 0$ (nonarithmeticity is obvious for laws with densities). Renewal theory for random walks with positive jumps (see for example [18], p.62, or [11], p.355) gives the following result: the law of the overshoot over a level x, that is $H_{T_x(H)} - x$, converges to m when $x - H_0$ goes to infinity. This result is tranmitted directly to the random walk $(S_n)_{n\geq 0}$, simply because it has the same overshoot: $S_{T_x} - x = H_{T_x(H)} - x$. Under $\mathbf{P}_v$, we have $x - H_0 = x - \ln v \to_{v\to 0+} +\infty$. Hence, when v goes to $0+$, the law of the variable $S_{T_x} - x$ under $\mathbf{P}_v$, or, equivalently, that of S_0 under $\mathbf{P}_v \circ \Theta_x$, converges to m.

Now, the usual Markov and scaling invariance properties show that for any x, v, under $\mathbf{P}_v \circ \Theta_x$, $(S_n - S_0, \mathcal{N}_n)_{n\geq 0}$ is independent of S_0 and has the same law as $(S_n, \mathcal{N}_n)_{n\geq 0}$ under $\mathbf{P}_1$. This altogether establishes the convergence of $(\mathbf{P}_v \circ \Theta_x)_+$ to $\mathbf{Q}$. □

Applying Lemma 5, we immediately deduce:

Corollary 7. *For any real number x, we have*

$$\mathbf{P}_v \circ \Theta_x \Rightarrow_{v\to 0^+} \mathbf{P}, \tag{3.3.4}$$

where $\mathbf{P}$ is the unique spatially stationary probability measure on Ω such that $\mathbf{P}_+ = \mathbf{Q}$.

Remark 1. *Call $\mathbf{P}^1$ the projection of $\mathbf{P}$ on the first coordinate, $\mathbf{Q}^1$ the projection of $\mathbf{Q}$ on the first coordinate, and Θ^1 the spatial translation operator induced on the first coordinate (defined by $\Theta^1_x(\omega^1) := (\omega^1_{n+T_x} - x)_{n\in\mathbb{Z}}$). It is immediate that $\mathbf{Q}^1$ is the law of a random walk where S_0 has distribution m, that we have $\mathbf{P}^1_+ = \mathbf{Q}$, and that $\mathbf{P}^1$ is spatially stationary. Similar arguments also show that $\mathbf{P}^1$ is the unique spatially stationary measure such that $\mathbf{P}^1_+ = \mathbf{Q}$. We call it the law of the spatially stationary random walk.*

We now want to deduce Theorem 3 from Corollary 7. To this end, we have to understand how to reconstruct $\dot{X}$ from $\Theta_x(S, \mathcal{N})$. We start by working under $\mathbf{P}_v$, for some $v > 0$. We introduce an important variable, $\alpha_x := \tau_{e^x}$, the instant of the first bounce with speed greater than $\exp(x)$ for the process $(X, \dot{X})$.

Observe that the definition of $\mathcal{N}_n$ (Formula (3.3.3)) induces that the length of the first arch of $\mathcal{N}_n$, that is $\zeta_1(\mathcal{N}_n)$, is equal to V_n^{-2} times the length of the $(1+n)$-th arch of $\dot{X}$. Writing α_x as the sum of the length of arches happening before time α_x, we get $\alpha_x = \sum_{n<T_x} V_n^{-2}\zeta_1(\mathcal{N}_n)$. We may also express α_x as a functional of $\Theta_x(S, \mathcal{N})$ by setting

$$\alpha_x = e^{2x} A(\Theta_x(S, \mathcal{N})), \tag{3.3.5}$$

where A is defined by

$$A(\omega) = \sum_{n<0} e^{2\omega^1_n} \zeta_1(\omega^2_n), \tag{3.3.6}$$

with the convention $\zeta_1(\emptyset) = 0$. Now, the process $(X_t, \dot{X}_t)_{t\geq \alpha_x}$ is given as the following functional of $\Theta_x(S, \mathcal{N})$:

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{X}_t &=& e^{S_{T_x}}\mathcal{N}_{T_x}(e^{-2S_{T_x}}(t-\alpha_x)) \\ X_t &=& \int_{\alpha_x}^t \dot{X}_u \mathrm{d}u\end{array}\right. \quad , \ t \geq \alpha_x.$$

Now, let us work under $\mathbf{P}$. It is natural to keep the definition of α_x given by Formula (3.3.5). Please note however that the sum defining α_x now contains an infinite number of nonzero terms. Take the following lemma for granted:

Lemma 7. *1) $\mathbf{P}$-almost surely, the time α_x is finite for any $x > 0$, and α_x goes to 0 when x goes to $-\infty$,*
2) The law of $(\alpha_x, S_{T_x}, \mathcal{N}_{T_x})$ under $\mathbf{P}_v$ converges to that under $\mathbf{P}$ when $v \to 0^+$.

See the next subsections for its proof. The first part enables us to define a process $(X_t, \dot{X}_t)_{t>0}$ on $\mathcal{C}^*$ by

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{X}_t &=& e^{S_{T_x}}\mathcal{N}_{T_x}(e^{-2S_{T_x}}(t-\alpha_x)) \\ X_t &=& \int_{\alpha_x}^t \dot{X}_u \mathrm{d}u\end{array}\right. \quad , \text{ for any } t, x \text{ such that } t \geq \alpha_x.$$

This construction is coherent. We call $\mathbb{P}_{0+}^{c*}$ its law on $\mathcal{C}^*$.

Under $\mathbb{P}_{0+}^{c*}$, the instant $\tau_u := \alpha_{\ln(u)}$ is the instant of the first bounce with speed greater than u. It is positive and converges a.s. to 0 when u goes to 0. Besides, the law of $S_{T_{\ln u}} - \ln u$ is equal to m, because by spatial stationarity, $\mathbf{P} \circ \Theta_{\ln u} = \mathbf{P}$. Now, take $x = \ln u$ and $t \geq \tau_u$ in the formula above. It follows that under $\mathbb{P}_{0+}^{c*}$, the law of $\ln(\dot{X}_{\tau_u}/u)$ is m, and that conditionally on $\dot{X}_{\tau_u} = v$, the process $(X_{\tau_u+t}, \dot{X}_{\tau_u+t})_{t\geq 0}$ has law $\mathbb{P}_v^c$. We leave to the reader the verification that it is also independent of $(X_s, \dot{X}_s)_{0<s<\tau_u}$. Hence the law $\mathbb{P}_{0+}^{c*}$ satisfies conditions $(*)$ and $(**)$.

The second part of the lemma proves that for any fixed $u > 0$, the joint law of τ_u and $(X_{\tau_u+t}, \dot{X}_{\tau_u+t})_{t\geq 0}$ under $\mathbb{P}_v^c$ converges to that under $\mathbb{P}_{0+}^{c*}$, as laws on $\mathcal{C}$. This proves the theorem, in its weak version.

Finally, all we have to do is to prove the lemma. Thanks to simple arguments, we can suppose $x = 0$. For the first part of the lemma, we even can simply prove that α_0 is $\mathbf{P}-$a.s. finite. Finally, note that under $\mathbf{P}$, we have almost surely $T_0 = 0$ and hence $\alpha_0 = A(\Theta_0(S, \mathcal{N})) = A(S, \mathcal{N})$.

This proof will be based on a more explicit description of the spatially stationary measures $\mathbf{P}$ and $\mathbf{P}^1$. We must distinguish between critical and supercritical cases.

3.3.2 Proof of Lemma 7 in the supercritical case

Throughout this section we suppose that $c > c_{crit}$. Therefore the drift $\mu = \mathbf{P}_1(S_1 - S_0) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln c$ is strictly positive. We propose a construction of $\mathbf{P}$ based on the introduction of a temporally stationary measure on Ω. If one just considers the first coordinate, this is a construction of the law of the spatially stationary random walk $\mathbf{P}^1$, using the temporally stationary random walk.

First, let us define this temporally stationary random walk. Introduce P_0, law of the random walk $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indexed by $\mathbb{Z}$, where $S_0 = 0$ and $(S_{n+1} - S_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ is i.i.d with common law that of the generic step. Then write P_x for the law of $(x + S_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ under P_0, and set

$$P_\lambda = \int_{\mathbb{R}} P_x \mathrm{d}x.$$

This σ-finite measure is (temporally) stationary, that is the law of $(S_{k+n})_{n\in\mathbb{Z}}$ under P_λ is P_λ, for any $k \in \mathbb{Z}$. This term "law" has to be understood in a generalized sense, that is in settings where we allow the laws to be not only probability measures but also σ-finite measures. We call this generalized process of law P_λ the (temporally) stationary random walk.

Now start again the same construction, but with adding the second coordinate. We first recall that under $\mathbf{P}_v$ and for $n \geq 0$, $(S_{n+1}, \mathcal{N}_{n+1})$ is measurable with respect to $(S_n, \mathcal{N}_n)$; we have $(S_{n+1}, \mathcal{N}_{n+1}) = F(S_n, \mathcal{N}_n)$, where F is a deterministic functional. For $n \leq 0$, consider Π_x^n for the law of $(S_k, \mathcal{N}_k)_{k\geq n}$, where $\mathcal{N}_n \overset{d}{=} \mathbb{P}_1^c$, $S_n = x - \ln(V_{-n}(\mathcal{N}_n))$ (recall that $V_{-n}(\mathcal{N}_n)$ denotes the velocity of the particle after the $(-n)-$th bounce), and the sequence $(S_k, \mathcal{N}_k)_{k>n}$ is given by $(S_k, \mathcal{N}_k) = F^{k-n}(S_n, \mathcal{N}_n)$.

It should be clear that the laws Π_x^n, $n \leq 0$, are compatible. Kolmogorov's existence theorem entails the existence of Π_x, the law on Ω under which $(S_k, \mathcal{N}_k)_{k\geq n}$ has law Π_x^n for any $n \leq 0$. Then we just define Π_λ by

$$\Pi_\lambda := \int \Pi_y \mathrm{d}y.$$

Again, this is a σ-finite (temporally) stationary measure. Besides, the law of the first coordinate S under Π_λ is P_λ.

Now, consider the event $\{T_x = n\}$, for $x \in \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{Z}$. It should be clear that its probability under P_λ is independent of x and n. The following lemma gives its value and states a link between Π_λ and $\mathbf{P}$, as well as between P_λ and $\mathbf{P}^1$ (recall Remark 1 after Corollary 7 for the introduction of the law of the spatially stationary random walk, $\mathbf{P}^1$).

Lemma 8. *Suppose $c > c_{crit}$.*
1) We have $P_\lambda(T_0 = 0) = \Pi_\lambda(T_0 = 0) = \mu \in (0, \infty)$.
2) We have $\mathbf{P}^1(\cdot) = P_\lambda(\cdot|T_0 = 0)$ and $\mathbf{P}(\cdot) = \Pi_\lambda(\cdot|T_0 = 0)$.

Proof. Recall that $\mu = \mathbf{P}_1(S_1 - S_0) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln c$ is strictly positive and finite. We still write $(H_n)_{n\geq 0}$ for the (strictly) ascending ladder height process of the sequence $(S_n)_{n\geq 0}$. Its drift $\mu_H = \mathbf{P}_1(H_1 - H_0)$ is also strictly positive and finite. A result of Woodroofe [42] and Gut [17] states that, for any $y > 0$, we have

$$\frac{1}{\mu_H} P_0(H_1 > y) = \frac{1}{\mu} P_0\left(\inf_{n\geq 1} S_n > y\right). \tag{3.3.7}$$

The calculation below follows:

$$\begin{aligned}
\Pi_\lambda(T_0 = 0) &= P_\lambda(T_0 = 0) \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}x P_x \left(\sup_{n \le -1} S_n < 0 \right) \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}x P_0 \left(\inf_{n \ge 1} S_n > x \right) \\
&= \mu \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\mu_H} P_0(H_1 > x) \\
&= \mu,
\end{aligned}$$

where we used a symmetry property in the third line. As $\mu \in (0, \infty)$ we can condition the infinite measure on the event $\{T_0 = 0\}$ to get the probability measure

$$\Pi_\lambda(\cdot | T_0 = 0) := \frac{1}{\mu} \Pi_\lambda(\cdot \mathbb{1}_{T_0=0}).$$

We leave to the reader the simple verification that this measure on Ω is spatially stationary in the sense of Definition 5 and is projected on the measure $\mathbf{Q}$ on Ω_+. Thus it must coincide with $\mathbf{P}$, by Corollary 7. □

We may now prove Lemma 7. For Lemma 7.1), recall that we should prove that the sum $A(S, \mathcal{N})$ is finite $\mathbf{P}$-a.s.

We start by proving that it is finite Π_x-almost surely, for a fixed x. Under Π_x, the sequence $(\zeta_1(\mathcal{N}_k))_{k \in \mathbb{Z}}$ is i.i.d with law that of ζ_1 under $\mathbb{P}_1^c$. Using the Borel-Cantelli lemma and estimate (3.2.3), we get that there are Π_x-a.s. only a finite number of $k > 0$ such that $\zeta_1(\mathcal{N}_{-k})$ is bigger than $\exp(\sqrt{k})$. On the other hand, the sequence $(S_{-k})_{k \ge 0}$ under Π_x is a simple random walk, with an almost sure linear decay. Hence, the sum $A(S, \mathcal{N})$ is finite Π_x-a.s. It follows that it is also finite Π_λ-almost surely (by integration) and $\mathbf{P}$-almost surely (by conditioning on a nontrivial event).

For Lemma 7.2), we need to prove the weak convergence of the law of $(\alpha_0, S_{T_0}, \mathcal{N}_{T_0})$ under $\mathbf{P}_v$ to that under $\mathbf{P}$, when $v \to 0^+$. We start by introducing another notation,

$$\alpha_{x,y} := \alpha_y - \alpha_x = \sum_{T_x \le n < T_y} V_n^{-2} \zeta_1(\mathcal{N}_n) \qquad , \text{ for } x < y.$$

It is clear that under $\mathbf{P}$, as well as under $\mathbf{P}_v$, we have almost surely $\alpha_x \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$ and $\alpha_{x,y} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \alpha_y$. We also have a uniform convergence result: the law of the time α_x under $\mathbf{P}_v$ converges in probability to 0 when x goes to $-\infty$, *uniformly on* v, in the following sense:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x_0, \forall x \le x_0, \forall v > 0, \quad \mathbf{P}_v(\alpha_x \ge \varepsilon) \le \eta. \tag{3.3.8}$$

Indeed, for any given $\varepsilon > 0$ and $\eta > 0$, we may choose y_0 such that $m([0, y_0]) \ge 1 - \eta$. Now, take $v > 0$. If $v > \exp(x)$, then $\alpha_x = 0$, and there is nothing to prove. We suppose

$v \leq \exp(x)$. From a scaling property, for any $y \geq 0$, we have

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_v(\alpha_x \geq \varepsilon) &= \mathbf{P}_{ve^y}(\alpha_{x+y} \geq \varepsilon e^{2y}) \\ &\leq \mathbf{P}_{ve^y}(\alpha_{x+y} \geq \varepsilon).\end{aligned}$$

Besides, under $\mathbf{P}_{ve^y}$, we have $T_{\ln v} = 0$ and thus $\alpha_{x+y} = \alpha_{\ln v, x+y}$. Hence, we have

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_v(\alpha_x \geq \varepsilon) &\leq \int_{\mathbb{R}_+} m(\mathrm{d}y)\mathbf{P}_{ve^y}(\alpha_{\ln v, x+y} \geq \varepsilon) \\ &\leq \eta + \int_{[0,y_0]} m(\mathrm{d}y)\mathbf{P}_{ve^y}(\alpha_{\ln v, x+y_0} \geq \varepsilon) \\ &\leq \eta + \int_{\mathbb{R}_+} m(\mathrm{d}y)\mathbf{P}_{ve^y}(\alpha_{\ln v, x+y_0} \geq \varepsilon) \\ &\leq \eta + \mathbf{P}(\alpha_{\ln v, x+y_0} \geq \varepsilon) \\ &\leq \eta + \mathbf{P}(\alpha_{x+y_0} \geq \varepsilon),\end{aligned}$$

where the next to last line is a disintegration formula for $\mathbf{P}$ at time $T_{\ln v}$ (recall that the law of $S_{T_{\ln v}} - v$ under $\mathbf{P}$ is m). Now, for x small enough, and uniformly on v, we get $\mathbf{P}_v(\alpha_x \geq \varepsilon) \leq 2\eta$. The uniform convergence result is proved.

We are ready to tackle the proof of Lemma 7.2). It is enough to prove the convergence of the expectation $\mathbf{P}_v(f(S_{T_0}, \mathcal{N}_{T_0}), \alpha_0 \geq a)$ to $\mathbf{P}(f(S_{T_0}, \mathcal{N}_{T_0}), \alpha_0 \geq a)$ for any continuous functional $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \to [0, 1]$ and any $a > 0$.

But Corollary 7 induces the convergence of the law of $(\alpha_{x,0}, S_{T_0}, \mathcal{N}_{T_0})$ under $\mathbf{P}_v$ to that under $\mathbf{P}$. It follows that $\mathbf{P}_v(f(S_{T_0}, \mathcal{N}_{T_0}), \alpha_{x,0} \geq a)$ goes to $\mathbf{P}(f(S_{T_0}, \mathcal{N}_{T_0}), \alpha_{x,0} \geq a)$ when v goes to 0, which in turn goes to $\mathbf{P}(f(S_{T_0}, \mathcal{N}_{T_0}), \alpha_0 \geq a)$ when x goes to $-\infty$. As $\alpha_0 \geq \alpha_{x,0}$ for any x, it follows

$$\liminf_{v \to 0} \mathbf{P}_v(f(S_{T_0}, \mathcal{N}_{T_0}), \alpha_0 \geq a) \geq \mathbf{P}(f(S_{T_0}, \mathcal{N}_{T_0}), \alpha_0 \geq a). \tag{3.3.9}$$

On the other hand, for any $\eta > 0$, choose $\varepsilon > 0$ such that $\mathbf{P}(\alpha_0 \in [a - \varepsilon, a[) \leq \eta$, and then choose x, given by the uniform convergence (3.3.8), such that for any $v > 0$, $\mathbf{P}_v(\alpha_x \geq \varepsilon) \leq \eta$. Then, considering the inequality

$$\mathbf{P}_v(f(S_{T_0}, \mathcal{N}_{T_0}), \alpha_0 \geq a) \leq \mathbf{P}_v(f(S_{T_0}, \mathcal{N}_{T_0}), \alpha_{x,0} \geq a - \varepsilon) + \mathbf{P}_v(f(S_{T_0}, \mathcal{N}_{T_0}), \alpha_x \geq \varepsilon)$$

and taking the lim sup, we get

$$\begin{aligned}\limsup_{v \to 0} \mathbf{P}_v(f(S_{T_0}, \mathcal{N}_{T_0}), \alpha_0 \geq a) &\leq \mathbf{P}(f(S_{T_0}, \mathcal{N}_{T_0}), \alpha_{x,0} \geq a - \varepsilon) + \eta \\ &\leq \mathbf{P}(f(S_{T_0}, \mathcal{N}_{T_0}), \alpha_0 \geq a) + 2\eta.\end{aligned}$$

This together with (3.3.9) gives the desired result. Lemma 7 is proved, in the supercritical case.

We finish this subsection with a corollary of Lemma 8.

Corollary 8. *Under $\mathbf{P}^1$ and conditionally on $S_0 = x \geq 0$, the sequence $(-S_{-n})_{n\geq 0}$ has the law of the random walk starting from $-x$ and conditioned to stay positive at times $n \geq 1$.*

Proof. Under P_λ and conditionally on $S_0 = x$, the sequence $(-S_{-n})_{n\geq 0}$ has the law of the random walk starting from $-x$. The event $\{T_0 = 0\}$, which is also equal to the event $\{S_0 > 0, \forall n < 0, S_n < 0\}$, has a positive and finite probability when $x \geq 0$. The expression of $\mathbf{P}^1$ given in Lemma 8 directly implies the corollary. □

3.3.3 Proof of Lemma 7 in the critical case

In the critical case, we certainly can define P_λ and Π_λ as before, but under these measures the time T_0 is almost surely equal to $-\infty$. Lemma 8 thus fails, and so does the previous construction of $\mathbf{P}^1$ and $\mathbf{P}$.

However, an "analogue of Corollary 8" will stay true and induce another construction of the law of the spatially stationary random walk $\mathbf{P}^1$. We will then use it to prove again the $\mathbf{P}-$almost sure finiteness of α_0, and Lemma 7 will follow from the same arguments as before. Throughout this section we assume $c = c_{crit}$.

The spatially stationary random walk in the critical case.

In order to formulate the "analogue of Corollary 8", we need to define the "random walk conditioned to stay positive" for a random walk with null drift, for which the event of staying positive for all positive times has probability 0. This is done in [6]. We recall it here briefly.

Write as usual P_x for the law of the random walk starting from position x. If you write $(D_n)_{n\geq 0}$ for the strictly descending ladder height process (defined in the exact similar way as the strictly ascending ladder height process, and also equal to the opposite of the strictly ascending ladder height process of $\widehat{S} := -S$) , the renewal function h is defined by

$$h(x) := \sum_{k=0}^{\infty} P_x(D_k \geq 0).$$

In particular h is non-decreasing, right-continuous, and we have $h(0) = 1$ and $h(x) = 0$ for $x < 0$. The renewal function is invariant for the random walk killed as it enters the negative half-line. It enables us to define the process conditioned on never entering $(-\infty, 0)$, thanks to a usual $h-$transform, in the sense of Doob. That is, the law of this process starting from $x > 0$, written $P_x^{\uparrow 0}$, is defined by

$$P_x^{\uparrow 0}(f(S)) = \frac{1}{h(x)} P_x(f(S)h(S_n), \inf_{k\leq n} S_k \geq 0) \tag{3.3.10}$$

for any $f(S) = f(S_0, ..., S_n)$ functional of the n first steps. For any $a \in \mathbb{R}$ and $x > a$, we also write $P_x^{\uparrow a}$ for the law of the random walk starting from $x > a$ and conditioned on never entering $(-\infty, a)$, defined in the exact same way, by

$$P_x^{\uparrow a}(f(S)) = \frac{1}{h(x-a)} P_x(f(S)h(S_n - a), \inf_{k\leq n} S_k \geq a) \tag{3.3.11}$$

for any $f(S) = f(S_0, ..., S_n)$ functional of the n first steps. The only other thing we will need to know about h is the following sub-additive inequality, which is a consequence of a Markov property:

$$h(x+a) - h(x) \leq h(a), \qquad x, a > 0. \tag{3.3.12}$$

Recall that μ_H is the drift of the strictly ascending ladder height process and write $p(x, y)$ for the transition densities of the random walk. The following proposition gives a disintegration description of the spatially stationary random walk, which is very similar to that of the spatially stationary Lévy process introduced by Bertoin and Savov in [7].

Proposition 4. *The measure $\nu(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) := \frac{1}{\mu_H} p(0, x+y) \mathbb{1}_{x\geq 0, y\geq 0} h(x) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ is a probability law. The law of $\mathbf{P}^1$ is determined by:*
- *Under $\mathbf{P}^1$, $(-S_{-1}, S_0)$ has the law ν.*
- *Conditionally on $-S_{-1} = x$ and $S_0 = y$, the processes $(-S_{-n-1})_{n\geq 0}$ and $(S_n)_{n\geq 0}$ are independent, the law of $(-S_{-n-1})_{n\geq 0}$ is $P_x^{\uparrow 0}$, that of $(S_n)_{n\geq 0}$ is P_y.*

The measure ν is nothing other than the stationary joint law of the overshoot and the undershoot. The proof of this theorem will last until the end of the subsection. As a preliminary, we introduce a crucial though rather simple lemma.

Lemma 9. *For any $0 \leq a \leq x$, we have:*

$$P_x^{\uparrow 0}(\inf_{n\geq 0} S_n \geq a) = \frac{h(x-a)}{h(x)} \tag{3.3.13}$$

$$P_x^{\uparrow 0}(\cdot | \inf_{n\geq 0} S_n \geq a) = P_x^{\uparrow a}(\cdot). \tag{3.3.14}$$

Proof. The event $\{\inf_{k\geq 0} S_k \geq a\}$ is the limit of the events $\{\inf_{0\leq k\leq n} S_k \geq a\}$, further

$$\begin{aligned}
& P_x^{\uparrow 0}(\inf_{0\leq k\leq n} S_k \geq a) \\
= \; & \frac{1}{h(x)} P_x(h(S_n), \inf_{0\leq k\leq n} S_k \geq a) \\
= \; & \frac{1}{h(x)} P_x(h(S_n - a), \inf_{0\leq k\leq n} S_k \geq a) + \frac{1}{h(x)} P_x(h(S_n) - h(S_n - a), \inf_{0\leq k\leq n} S_k \geq a).
\end{aligned}$$

The first term of the sum is equal to $\frac{h(x-a)}{h(x)}$ because the function $h(\cdot - a)$ is invariant for the random walk killed when hitting $(-\infty, a)$. The second term is positive and bounded from above by $\frac{h(a)}{h(x)} P_x(\inf_{0\leq k\leq n} S_k \geq a)$, which goes to 0 when n goes to $+\infty$. This proves equation (3.3.13). Then (3.3.14) is straightforward: Indeed, for $f(S) = f(S_0, ..., S_n)$ functional of the n first steps, we have:

$$\begin{aligned}
P_x^{\uparrow 0}(f(S) | \inf_{k\geq 0} S_k \geq a) &= \frac{1}{P_x^{\uparrow 0}\left(\inf_{k\geq 0} S_k \geq a\right)} P_x^{\uparrow 0}\left(f(S) P_{S_n}^{\uparrow 0}\left(\inf_{k\geq 0} S_k \geq a\right), \inf_{0\leq k\leq n} S_k \geq a\right) \\
&= \frac{h(x)}{h(x-a)} \cdot \frac{1}{h(x)} P_x\left(f(S) h(S_n) \frac{h(S_n - a)}{h(S_n)}, \inf_{0\leq k\leq n} S_k \geq a\right) \\
&= P_x^{\uparrow a}(f(S)).
\end{aligned}$$

□

Now, recall that the invariance property of h states that, for any $x \geq 0$, we have

$$h(x) = P_x(h(S_1)\mathbb{1}_{S_1 \geq 0}).$$

Define $\overline{h}$ by $\overline{h}(x) := P_x(h(S_1), S_1 \geq 0)$ for *any real number* x. Thus for $x \geq 0$, $\overline{h}$ and h coincide, but for $x < 0$ they certainly don't. This enables to define the law $P_x^{\uparrow 0}$ of the random walk starting from x and conditioned on never hitting the negative half-line *at times* $n \geq 1$, by the formula:

$$P_x^{\uparrow 0}(f(S)) = \frac{1}{\overline{h}(x)} P_x(f(S)h(S_n), \inf_{1 \leq k \leq n} S_k \geq 0) \tag{3.3.15}$$

for any functional $f(S) = f(S_0, ..., S_n)$. This is consistent with our previous notations, and, for $y < x$, we have

$$P_x^{\uparrow 0}(\cdot) = P_x^{\uparrow y}(\cdot | \inf_{n \geq 1} S_n \geq 0).$$

We leave to the reader the verification that formula (3.3.13) can be generalized to

$$P_x^{\uparrow y}(\inf_{n \geq 1} S_n \geq a) = \frac{\overline{h}(x-a)}{\overline{h}(x-y)} \tag{3.3.16}$$

with the only requirement $y < a$.

The following lemma is a result of straightforward calculations that we leave to the interested reader.

Lemma 10. *Write ν_- (resp. ν_+) for the first (resp. second) marginal of ν. These measures on $\mathbb{R}_+$ are given for $x, y > 0$, by*

$$\begin{aligned} \nu_-(\mathrm{d}x) &= \frac{1}{\mu_H} h(x) P_0(S_1 \geq x)\mathrm{d}x. \\ \nu_+(\mathrm{d}y) &= \frac{1}{\mu_H} \overline{h}(-y)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Moreover,

$$\begin{aligned} P_{-\nu_-}(S_1 \in \mathrm{d}y | S_1 \geq 0) &= \nu_+(\mathrm{d}y) \\ P^{\uparrow 0}_{-\nu_+}(\mathrm{d}x) &= \nu_-(\mathrm{d}x), \end{aligned}$$

where we have written $P_{-\nu_-}(...)$ for $\int P_{-x}(...)\nu_-(\mathrm{d}x)$ and $P_{-\nu_+}(...)$ for $\int P_{-x}(...)\nu_+(\mathrm{d}x)$.

This lemma should make the introduction of the measure ν in the theorem more transparent. It indeed gives us two alternative ways of defining the measure $\mathbf{P}^1$. First, take S_0 distributed according to ν_+ and, conditionally on $S_0 = y$, take $(S_n)_{n \geq 0}$ of law P_y and $(-S_{-n})_{n \geq 0}$ independent and of law $P_{-y}^{\uparrow 0}$ (in the sense defined just before). Second, take $-S_{-1}$ distributed according to ν_- and, conditionally on $S_{-1} = -x$, take $(S_{n-1})_{n \geq 0}$ of law P_{-x} conditioned on having a first jump no smaller than x, and $(-S_{-n-1})_{n \geq 0}$ independent and of law $P_x^{\uparrow 0}$.

Proof of the proposition. We need to prove three things, the fact that ν is a probability measure (that is, has mass one), the fact that $\mathbf{P}^1$ is spatially stationary, and the equality $\mathbf{P}^1_+ = \mathbf{Q}$. We start with the spatial stationarity. Fix $a > 0$. We should prove that $S = (S_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ and $R := \Theta_a(S) = (S_{T_a+n} - a)_{n\in\mathbb{Z}}$ have the same law under $\mathbf{P}^1$.

We introduce the notation L_a for the instant of the last passage under level a for the process S. Besides, observe that T_a is also equal to the instant of the last passage under level a for the process $(-R_{-n})_{n\geq 0}$. *Suppose that we proved* that $((T_a, -R_{-n})_{0\leq n\leq T_a})$ has the same law as the process $(L_a, (S_n)_{0\leq n\leq L_a})$ under $P^{\uparrow 0}_{-\nu_+}$. Then, conditionally on $-R_{-T_a} = z$, it is clear that the process $(-R_{-n-T_a})_{n\geq 0} = (a - S_{-n})_{n\geq 0}$ is independent of $(-R_{-n})_{0\leq n\leq T_a}$ and follows the law $P^{\uparrow a}_z$. Besides, for a process S under $P^{\uparrow 0}_{-\nu_+}$, conditionally on $S_{L_a} = z$, the process $(S_{n+L_a})_{n\geq 0}$ is independent from $(S_n)_{0\leq n\leq L_a}$ and follows the law $P^{\uparrow a}_z$. This altogether proves that the process $(-R_{-n})_{n\geq 0}$ follows the law $P^{\uparrow 0}_{-\nu_+}$. Finally, from a Markov property, it is clear that given $R_0 = y$, the process $(R_n)_{n\geq 0}$ is independent of $(R_n)_{n\leq 0}$ and follows the law P_y, thus the law of $(R_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ is $\mathbf{P}^1$.

Hence, the only thing we still need to prove is the following duality property [3]: the variable $(T_a, (-R_{-n})_{0\leq n\leq T_a})$ has the same law as the variable $(L_a, (S_n)_{0\leq n\leq L_a})$ for a process S of law $P^{\uparrow 0}_{-\nu_+}$. Fix $n \geq 0$ and $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ a positive continuous functional. We should prove the following equality:

$$\mathbf{P}^1(f((-R_{-k})_{0\leq k\leq n})\mathbb{1}_{T_a=n}) = P^{\uparrow 0}_{-\nu_+}(f((S_k)_{0\leq k\leq n})\mathbb{1}_{L_a=n}).$$

The case $n = 0$ is particular and follows from this calculation:

$$\begin{aligned} P^{\uparrow 0}_{-\nu_+}(-S_0 \in \mathrm{d}x, L_a = 0) &= P^{\uparrow 0}_{-x}(\inf_{k\geq 1} S_k \geq a)\nu_+(\mathrm{d}x) \\ &= \frac{1}{\mu_H}\overline{h}(-x)\frac{\overline{h}(-a-x)}{\overline{h}(-x)}\mathrm{d}x \\ &= \nu_+(a + \mathrm{d}x) = \mathbf{P}^1(R_0 \in \mathrm{d}x, T_a = 0). \end{aligned}$$

In the case $n > 0$, we write $\tilde{f}((S_k)_{0\leq k\leq n}) := f((a - S_{n-k})_{0\leq k\leq n})$, the usual duality property for random walks stating

$$P_x(f(S)\mathbb{1}_{a-S_n\in\mathrm{d}y})\mathrm{d}x = P_y(\tilde{f}(S)\mathbb{1}_{a-S_n\in\mathrm{d}x})\mathrm{d}y.$$

We are ready to calculate

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}^1(f((-R_{-k})_{0\leq k\leq n})\mathbb{1}_{T_a=n}) \\ =\ &\mathbf{P}^1(\tilde{f}((S_k)_{0\leq k\leq n})\mathbb{1}_{T_a=n}) \\ =\ &\int\int_{(x,y)\in\mathbb{R}_+\times[0,a)} \nu_+(\mathrm{d}y)P_y(\tilde{f}((S_k)_{0\leq k\leq n}), S_n - a \in \mathrm{d}x, \forall 0 \leq i < n, S_i \leq a) \\ =\ &\int\int_{\mathbb{R}_+\times[0,a)} \frac{1}{\mu_H}\overline{h}(-y)\mathrm{d}xP_{-x}(f((S_k)_{0\leq k\leq n}), a - S_n \in \mathrm{d}y, \forall 0 < i \leq n, S_i \geq 0) \\ =\ &\int\int_{\mathbb{R}_+\times[0,a)} \frac{\mathrm{d}x}{\mu_H}P_{-x}(f((S_k)_{0\leq k\leq n})h(S_n), a - S_n \in \mathrm{d}y, \forall 0 < i \leq n, S_i \geq 0)\frac{\overline{h}(-y)}{h(a-y)}. \end{aligned}$$

3. This property also finds its analogue in [7], in their Theorem 2.

Using then (3.3.15) and (3.3.16), we get

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}^1(f((-R_{-k})_{0\le k\le n})\mathbb{1}_{T_a=n}) \\
&= \int\int_{\mathbb{R}_+\times[0,a)} \nu_+(\mathrm{d}x)P^{\uparrow 0}_{-x}(f((S_k)_{0\le k\le n}), a-S_n\in \mathrm{d}y)P^{\uparrow 0}_{a-y}(\inf_{k\ge 1} S_k\ge a) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \nu_+(\mathrm{d}x)P^{\uparrow 0}_{-x}(f((S_k)_{0\le k\le n}), S_n<a, \inf_{k>n} S_k\ge a) \\
&= P^{\uparrow 0}_{-\nu_+}(f((S_k)_{0\le k\le n})\mathbb{1}_{L_a=n}).
\end{aligned}$$

The measure $\mathbf{P}^1$ is thus spatially stationary.

Now the two facts that ν has mass one and that $\mathbf{P}^1_+=\mathbf{Q}$ both follow from the equality

$$\overline{h}(-y)=P_0(H_1\ge y)$$

for $y\ge 0$ (recall that H is the strictly ascending ladder height process). Fix some $y\ge 0$. We already know from (3.3.16) that $\overline{h}(-y)=P^{\uparrow 0}_0(\inf_{n\ge 0} S_n\ge y)$, thus we should prove

$$P_0(H_1\in \mathrm{d}y)=P^{\uparrow 0}_0(\inf_{n\ge 0} S_n\in \mathrm{d}y). \tag{3.3.17}$$

This will be a consequence from another duality argument. Write T_{inf} for the instant when S hits its minimum on times $n\ge 1$. Write $\tilde{T}_1:=\inf\{n>0, S_n>S_0\}$ (so that $S_{\tilde{T}_1}=H_1$). Then $(S_k)_{0\le k\le \tilde{T}_1}$ under P_0 and $(S_k)_{0\le k\le T_{inf}}$ under $P^{\uparrow 0}_0$ are in duality. Indeed, fix $n>0$ and $f(S)=f((S_k)_{0\le k\le n})$ a positive continuous functional. Write also $\tilde{f}((S_k)_{0\le k\le n}):=f((S_n-S_{n-k})_{0\le k\le n}$. Then,

$$\begin{aligned}
P^{\uparrow 0}_0(f(S)\mathbb{1}_{\{T_{inf}=n\}}) &= P^{\uparrow 0}_0(f(S), \inf_{1\le k\le n-1} S_k>S_n, \inf_{k\ge n+1} S_k\ge S_n) \\
&= P^{\uparrow 0}_0(f(S)P^{\uparrow 0}_x(\inf_{k\ge 1} S_k\ge x)\Big|_{x=S_n}, \inf_{1\le k\le n-1} S_k>S_n) \\
&= P^{\uparrow 0}_0\Big(\frac{f(S)}{h(S_n)}, \inf_{1\le k\le n-1} S_k>S_n\Big) \\
&= P_0(f(S), \inf_{1\le k\le n-1} S_k>S_n\ge 0) \\
&= P_0(\tilde{f}(S), \sup_{1\le k\le n-1} S_k<0, S_n\ge 0) \\
&= P_0(\tilde{f}(S), \sup_{1\le k\le n-1} S_k<0, S_n>0) \\
&= P_0(\tilde{f}(S)\mathbb{1}_{\{\tilde{T}_1=n\}}).
\end{aligned}$$

This duality property implies in particular (3.3.17). □

Finiteness of α_0 in the critical case.

The only thing we actually need from the last subsection is the fact that under $\mathbf{P}^1$ (or, equivalently, under $\mathbf{P}$), the sequence $(-S_{-n})_{n\ge 1}$ is a random walk conditioned to stay positive, with some initial law. The paper [19] gives very precise results about the behavior of this random walk conditioned to stay positive, and we deduce in particular the following rough bounds that are sufficient for our purposes:

Lemma 11. *For any $\varepsilon > 0$, we have*

$$n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} S_{-n} \to -\infty \tag{3.3.18}$$

when $n \to \infty$, $\mathbf{P}$-a.s.

We now work under $\mathbf{P}$ and we recall that α_0 is then given by

$$\alpha_0 = \sum_{n<0} e^{2S_n} \zeta_1(\mathcal{N}_n).$$

We write $L_n := e^{2S_n}\zeta_1(\mathcal{N}_n)$ for the duration of the arch of index n. We need to transfer the results about the behavior of (S_{-n}) to results about the behavior of (L_{-n}). This is made possible by the following lemma:

Lemma 12. *1) Under $\mathbf{P}$ and conditionally on a realization $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, the variables $(L_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ are mutually independent, and the law of L_n is that of ζ_1 under $\mathbb{P}^c_{\exp(s_n)}(\cdot|V_1 = \exp(s_{n+1}))$.*

2) If $u, v \leq a$ for some real number a, then

$$\mathbb{P}^c_u(\zeta_1 > ta^2 | V_1 = cv) \leq \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}} t^{-\frac{3}{2}}. \tag{3.3.19}$$

Proof. The result of the first part is easy for $(L_n)_{n\geq 0}$, and we get the result for $(L_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ by spatial stationarity.

For the second part, observe that the law of the couple (ζ_1, V_1) under $\mathbb{P}^c_u$ is known (see Lemma 4, Formulas (3.2.1) and (3.2.2)). Thus, we get explicitly:

$$\frac{1}{\mathrm{d}s}\mathbb{P}^c_u\left(\zeta_1 \in \mathrm{d}s | V_1 = cv\right) = \frac{\sqrt{2}(u^3+v^3)}{s^2 u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}}} \exp(-2\frac{v^2 - uv + u^2}{s}) \int_0^{\frac{4uv}{s}} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\pi\theta}}.$$

Provided that we take $u, v \leq a$ we get

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathrm{d}s}\mathbb{P}^c_u\left(\zeta_1 \in \mathrm{d}s | V_1 = cv\right) &\leq \frac{2\sqrt{2}a^3}{s^2 u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\frac{4uv}{s}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \\ &\leq \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} a^3 s^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Integrating this inequality between ta^2 and $+\infty$ gives (3.3.19). □

The **P**-almost sure finiteness of α_0 follows straightforwardly. Write

$$A_n = e^{S_n} \vee \frac{e^{S_{n+1}}}{c},$$

and, for $n > 0$, write E_n for the event

$$L_{-n} \geq n\ A_{-n}^2.$$

The lemma states that the probability of E_n is bounded above by a constant times $n^{-\frac{3}{2}}$. Hence only a finite number of E_n occur, almost surely. This together with (3.3.18) gives that the $(L_{-n})_{n\geq 0}$ are summable, almost surely. This shows the **P**-almost sure finiteness of $A(S, \mathcal{N})$ and concludes the proof.

3.4 Appendix

The appendix is devoted to the proof of the technical lemma 5.

First notice that the uniqueness is immediate. Consider P and P' two probabilities satisfying the conditions of Lemma 5. Then for any real x, we have $(P \circ \Theta_x)_+ = P_+ = Q = (P' \circ \Theta_x)_+$. It follows $P = P'$.

The key point is the construction of the probability P, which will be a consequence of Kolmogorov existence theorem. First, note that we have $\Theta_x \circ \Theta_y = \Theta_{x+y}$ for any x, y reals. Take $x > 0$. On the one hand, from $(P_v \circ \Theta_0)_+ \Rightarrow Q$, we deduce $(P_v \circ \Theta_0)_+ \circ \Theta_x \Rightarrow Q \circ \Theta_x$. On the other hand, we have $\big((P_v \circ \Theta_0)_+ \circ \Theta_x\big)_+ = (P_v \circ \Theta_x)_+ \Rightarrow Q$. Thus the laws $(Q \circ \Theta_x)_+$ and Q are identical for any $x > 0$.

For $x_1 < ... < x_n$ reals, we define first Y^{x_1} as a variable of law Q on Ω, then Y^{x_i} by $Y^{x_i} = (\Theta_{x_i - x_1}(Y^{x_1}))_+$, so that Y_{x_i} also has law Q. We write $Q^{x_1,\dots,x_n}$ for the law of $(Y^{x_1}, ..., Y^{x_n})$ obtained in that way, on $\Omega^{x_1,\dots x_n}$. These laws are compatible. Thus Kolmogorov's theorem tells that there exists a law $\overline{Q}$ on $\Omega^{\mathbb{R}}$ such that the finite dimensional marginals of $\overline{Q}$ on say $x_1, ..., x_n$ is equal to $Q^{x_1,\dots,x_n}$.

Let $(Z^x)_{x\in\mathbb{R}}$ be with law $\overline{Q}$. Then, define a random variable $Y = (Y(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ on Ω by

$$Y(k) := \lim_{a\to\infty} \Theta_a(Z^{-a})(k).$$

This definition requires some explanation. First, $\overline{Q}(T_a(Z^{-a}) \geq -k) = \overline{Q}(T_a(Z^0) \geq -k)$ converges to 1 when a goes to $+\infty$. Thus a.s. for some a we have $T_a(Z^{-a}) \geq -k$ and then $\Theta_a(Z^{-a})(k) \neq -\infty$. But for any $x > a$, we have:

$$\begin{aligned} \Theta_a(Z^{-a})(k) &= \Theta_a((\Theta_{x-a}(Z^{-x}))_+)(k) \\ &= \Theta_a \circ \Theta_{x-a}(Z^{-x})(k) = \Theta_x(Z^{-x})(k), \end{aligned}$$

where we can drop the index $+$ at the second equality because we are on the event $T_a(Z^{-a}) \geq -k$. Thus for each k the family $(\Theta_a(Z^{-a})(k))_{a\geq 0}$ is constant as soon as it leaves $-\infty$, and the limit is well-defined.

Observe that the random variable Y satisfies the conditions

$$\lim_{k\to-\infty} Y^1(k) = -\infty, \qquad \limsup_{k\to+\infty} Y^1(k) = +\infty.$$

Its probability law P on Ω not only satisfies $P_+ = Q$, it is also spatially invariant: Indeed, for any x, the variable $\Theta_x(Y)$ has law $P \circ \Theta_x$ and is given by

$$\Theta_x(Y)(k) = \lim_{a\to\infty} \Theta_{x+a}(Z^{-a})(k) = \lim_{a\to\infty} \Theta_a(Z^{-a-x})(k).$$

But it is obvious that the family $(Z^{a-x})_{a\in\mathbb{R}}$ also has law $\overline{Q}$, hence $\Theta_x(Y)$ has law P.

Finally, we still have to prove $P_v \circ \Theta_x \Rightarrow P$. Take f any positive bounded continuous functional depending on a finite number of variables $\omega_{t_1}, ...\omega_{t_n}$, with $t = t_1 < ... < t_n$, so that $f((\omega_s)_{s\in\mathbb{Z}}) = f((\omega_s)_{s\geq t})$. We suppose without loss of generality $t < 0$. Observe that under the probability $P_v \circ \Theta_x$ or under P, we have $T_0 = 0$, and the events $T_{-y} \leq t$ and $T_y \circ \Theta_{-y} > -t$ coincide, almost surely. Observe also $Q(T_y \leq -t) \to_{y\to\infty} 0$. Then,

$$\begin{array}{rcl}
P_v \circ \Theta_x(f((\omega_s)_{s\geq t})\mathbb{1}_{T_{-y}<t}) & = & P_v \circ \Theta_{x-y}(f \circ \Theta_y((\omega_s)_{s\geq t}), T_y > -t) \\
& = & (P_v \circ \Theta_{x-y})_+(f \circ \Theta_y((\omega_s)_{s\geq t}), T_y > -t) \\
& \underset{v\to 0^+}{\longrightarrow} & Q(f \circ \Theta_y((\omega_s)_{s\geq t}), T_y > -t) \\
& = & P(f \circ \Theta_y((\omega_s)_{s\geq t}), T_y > -t) \\
& = & P(f((\omega_s)_{s\geq t}), T_{-y} < t),
\end{array}$$

where we get the second line because the functional $\mathbb{1}_{T_y>-t} f \circ \Theta_y((\omega_s)_{s\geq t})$ does not depend on $(\omega_n)_{n<0}$, and where we obtain the last line thanks to the translation Θ_{-y}. Besides, we have:

$$\begin{array}{rcl}
|P_v \circ \Theta_x(f((\omega_s)_{s\geq t})\mathbb{1}_{T_{-y}<t}) - P_v \circ \Theta_x(f((\omega_s)_{s\geq t}))| & \leq & \sup(f) P_v \circ \Theta_x(\mathbb{1}_{T_{-y}\geq t}) \\
& = & \sup(f) P_v \circ \Theta_{x-y}(\mathbb{1}_{T_y \leq -t}) \\
& \to_{v\to 0^+} & \sup(f) Q(\mathbb{1}_{T_y\leq -t}) \to_{y\to\infty} 0,
\end{array}$$

and in the same way

$$P(f((\omega_s)_{s\geq t}), T_{-y} < -t) \longrightarrow_{y\to\infty} P(f((\omega_s)_{s\geq t})).$$

This is enough to deduce

$$P_v \circ \Theta_x(f((\omega_s)_{s\geq t}) \to P(f((\omega_s)_{s\geq t})).$$

The law $P_v \circ \Theta_x$ does converge weakly to P.

Chapter 4

Langevin processes reflected on a partially elastic boundary II

Abstract

A particle subject to a white noise external forcing moves like a Langevin process. Consider now that the particle is reflected at a boundary which restores a portion c of the incoming speed at each bounce. For c strictly smaller than the critical value $c_{crit} = \exp(-\pi/\sqrt{3})$ the bounces of the reflected process accumulate in a finite time. We show that nonetheless the particle is not necessarily absorbed after this time. We define a "resurrected" reflected process via its Itō excursion measure and study some of his properties. The resurrected reflected process is also characterized as the unique solution of the stochastic differential equation describing the model.

Résumé

Une particule soumise à une force extérieure de type bruit blanc se comporte comme un processus de Langevin. Considérons maintenant que la particule est réfléchie sur une barrière qui, à chaque rebond, lui restitue une portion c de sa vitesses incidente. Pour c strictement inférieur à la valeur critique $c_{crit} = \exp(-\pi/\sqrt{3})$, les rebonds du processus réfléchi s'accumulent presque sûrement en temps fini. Nous montrons que néanmoins la particule n'est pas nécessairement absorbée en cet instant. Nous définissons un processus réfléchi "ressuscité" par l'intermédiaire de sa mesure d'excursion d'Itō et étudions certaines de ses propriétés. Le processus réfléchi ressuscité est aussi caractérisé comme étant l'unique solution de l'équation différentielle stochastique décrivant le modèle.

4.1 Introduction

Consider a particle in a one-dimensional space, submitted to a white noise external forcing. Its velocity is then well-defined and given by a Brownian motion, while its position is given by a so-called Langevin process. We refer to Lachal [26] for a detailed account about this process. Further, suppose it is constrained to stay in $[0, +\infty)$ by a boundary at 0 characterized by an elasticity coefficient $c \geq 0$. That is, the boundary restores a portion c of the incoming velocity at each bounce, and the equation of motion that we consider is the following:

$$(SOR) \qquad \begin{cases} X_t &= X_0 + \int_0^t \dot{X}_s \mathrm{d}s \\ \\ \dot{X}_t &= \dot{X}_0 + B_t - (1+c) \sum_{0<s\leq t} \dot{X}_{s-} \mathbb{1}_{X_s=0}, \end{cases}$$

where B is a standard Brownian motion and $(X_0, \dot{X}_0)$ is the initial condition. This stochastic differential equation is nice outside the point $(0,0)$, as just after a time t such that $(X_t, \dot{X}_t) \neq (0,0)$, there is an obvious pathwise construction of the solution to the SDE. However there is a tough problem at $(0,0)$. Indeed, consider the deterministic analogue to theses equations, where the white noise force is replaced by a deterministic force. There exists an old literature on the subject (see Ballard [2] for a vast review). In 1960 Bressan [9] already pointed out that multiple solutions may occur, even when the force is $\mathcal{C}^\infty$. It appears that the introduction of a white noise allows to get back in a certain sense a weak uniqueness. We refer to [5] (see also [4], [21]) for the particular case $c = 0$.

In Chapter 3, we have shown for $c > 0$ the existence of two different regimes, the critical elasticity being $c_{crit} := \exp(-\pi/\sqrt{3})$. It is critical in the sense that for $c \geq c_{crit}$, starting from any initial condition (x, u), the process will never hit $(0,0)$, while for $c < c_{crit}$ the process will hit it in a finite time. In other words, for $c \geq c_{crit}$ there is almost surely no accumulation of bounces, while for $c < c_{crit}$ there is almost surely accumulation of bounces in finite time.

We refer to Chapter 3 for the study of the super-critical and critical regimes, while we study here the sub-critical regime $c < c_{crit}$. Then the hitting time of $(0,0)$, written ζ_∞, is finite almost surely. We write $\mathbb{P}^c_{x,u}$ for the law of the reflected Langevin process killed at time ζ_∞, and P^c_t for the associated semigroup. We will devote ourselves to prove the existence of a unique recurrent extension to this process that leaves $(0,0)$ continuously.

We point out that this model was encountered by Bect in his thesis ([3], section III.4.B). He observed the existence of the critical elasticity and asked several questions on the different regimes. We answer to all of them.

In this work we will be largely inspired by a paper of Rivero [35], in which he studies the recurrent extensions of a self-similar Markov process with semigroup P_t. Briefly, first, he recalls that recurrent extensions are equivalent to excursion measures compatible with P_t -

thanks to Itō's program - and more concisely to the entrance laws of these excursion measures. Then a change of probability allows him to define the Markov process conditioned on never hitting 0, where this conditioning is in the sense of Doob, via an $h-$transform. An inverse $h-$transform on the Markov process conditioned on never hitting zero and *starting from 0* then gives the construction of an entrance law, and thus of an excursion measure. We will not recall it at each step throughout the paper, but a lot of parallels can be made. Here, it is the two dimensional Markov process $(X, \dot{X})$ that we consider, and a random walk $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constructed from the velocities at bouncing times that will be introduced in the Preliminaries.

At the end of the short preliminaries we will give an estimate of the tail of the variable ζ_∞ under $\mathbb{P}^c_{0,1}$. In the next section we introduce a change of probability and an $h-$transform in order to define $\widetilde{\mathbf{P}}_{x,u}$, law of a process which can be viewed as the reflected Langevin process conditioned on never being absorbed. We then show in Subsection 4.3.2 that this law has a weak limit $\widetilde{\mathbb{P}}_{0+}$ when (x,u) goes to $(0,0)$, using the same method that was used in Chapter 3 to show that for $c > c_{crit}$, the laws $\mathbb{P}^c_{0,u}$ have the weak limit $\mathbb{P}^c_{0+}$ when u goes to zero. All this Section can be seen as a long digression to prepare the construction of the excursion measure in Section 4.4. This construction – similar to that of the excursion measure of Brownian motion involving the law of a Bessel(3) process – gives the unique excursion measure compatible with the semigroup P^c_t. We call *resurrected Langevin process* the corresponding recurrent extension. Finally, we prove that this is the (weakly) unique solution to (SOR) when the starting position is $(0,0)$.

4.2 Preliminaries

We largely use the same notations as in Chapter 3. For the sake of simplicity, we use the same notation (say P) for a probability measure and for the expectation under this measure. We will even authorize ourselves to write $P(f, A)$ for the quantity $P(f\mathbb{1}_A)$, when f is a measurable functional and A an event. We introduce $D = (\{0\} \times \mathbb{R}^*_+) \cup (\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R})$ and $D^0 := D \cup \{(0,0)\}$. Our working space is $\mathcal{C}$, the space of càdlàg trajectories $(x, \dot{x})$: $[0,\infty) \to D^0$, which satisfy

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(s)\mathrm{d}s.$$

That space is endowed with the $\sigma-$algebra generated by the coordinate maps and with the topology induced by the following injection:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \to & \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D} \\ (x,\dot{x}) & \mapsto & \big(x(0), \dot{x}\big), \end{array}$$

where $\mathbb{D}$ is the space of càdlàg trajectories on $\mathbb{R}_+$, equipped with Skorohod topology.

We denote by $(X, \dot{X})$ the canonical process and by $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ its natural filtration, satisfying the usual conditions of right continuity and completeness. We call the first hitting time of zero, for the process X, $\zeta_1 := \inf\{t > 0, X_t = 0\}$. More generally, the sequence of the successive hitting times of zero $(\zeta_n)_{n\geq 1}$ is defined recursively by $\zeta_{n+1} := \inf\{t > \zeta_n, X_t = 0\}$. We write $(V_n)_{n\geq 1} := (\dot{X}_{\zeta_n})_{n\geq 1}$ for the sequence of the velocities of the process at these hitting times (that is the outgoing velocity, recall that we work with right-continuous processes). Recall that $\mathbb{P}^c_{x,u}$ stands for the law of the reflected Langevin process, starting from position x, velocity u, and killed at time ζ_∞, which is defined by

$$\zeta_\infty := \inf\{t > 0, X_t = 0, \dot{X}_t = 0\},$$

and which coincides almost surely [1] with $\sup \zeta_n$. When X is a reflected Langevin process, we call reflected Kolmogorov process the two dimensional process $(X, \dot{X})$. It is a Markov process, killed at ζ_∞, its hitting time of $(0,0)$. When the starting position is 0, we will also write $\mathbb{P}^c_u$ for $\mathbb{P}^c_{0,u}$, and we will then note $\zeta_0 = 0$ and $V_0 = \dot{X}_0$.

An easy application of the scaling property (see Chapter 3) shows that under $\mathbb{P}^c_u$, the sequence $\left(\frac{\zeta_{n+1}-\zeta_n}{V_n^2}, \frac{V_{n+1}}{V_n}\right)_{n\geq 0}$ is i.i.d. and of law independent of u. This law has been calculated by McKean ([31]) and is given by:

$$\frac{1}{\mathrm{d}s\mathrm{d}v}\mathbb{P}^c_1\left((\zeta_1, V_1/c) \in (\mathrm{d}s, \mathrm{d}v)\right) = \frac{3v}{\pi\sqrt{2}s^2}\exp(-2\frac{v^2-v+1}{s})\int_0^{4v/s} e^{-\frac{3\theta}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\pi\theta}}. \tag{4.2.1}$$

In particular, the sequence $S_n := \ln(V_n)$ is a random walk. For the critical value $c_{crit} = \exp(-\pi/\sqrt{3})$, its drift is $\mathbb{P}^{c_{crit}}_1(S_1 - S_0) = 0$. In this paper we lie in the subcritical case $c < c_{crit}$. Then the drift of the random walk, given by

$$\mathbb{P}^c_1(S_1 - S_0) = \ln(c/c_{crit}),$$

is negative (see again Chapter 3). A thorough study allows to not only deduce the finiteness of ζ_∞, but also estimate its tail:

Lemma 13. *We have*

$$\mathbb{P}^c_1\left(V_1^x\right) = \frac{c^x}{2\cos(\frac{x+1}{3}\pi)} \text{ for } x < 1/2. \tag{4.2.2}$$

There exists a unique $k = k(c)$ in $(0, 1/4)$ such that $\mathbb{P}^c_1\left(V_1^{2k}\right) = 1$, and

$$\mathbb{P}^c_1(\zeta_\infty > t) \underset{t\to\infty}{\sim} C_1 t^{-k}, \tag{4.2.3}$$

where $C_1 = C_1(c) \in (0,\infty)$ is a constant depending only on c, given by

$$C_1 = \frac{\mathbb{P}^c_1\left(\zeta_\infty^k - (\zeta_\infty - \zeta_1)^k\right)}{k\mathbb{P}^c_1(V_1^{2k}\ln(V_1^2))}. \tag{4.2.4}$$

1. Rigorously, we may use the fact that the continuous part of $\dot{X}$ is a Brownian motion and thus uniformly continuous on each compact set, in order to ensure that the hitting time of $(0,0)$ and $\sup \zeta_n$ coincide almost surely

In other words, $k(c)$ is given implicitly as the unique solution in $[0, \frac{1}{4}]$ of the equation

$$c = \left[2\cos\left(\frac{2k+1}{3}\pi\right)\right]^{\frac{1}{2k}}. \tag{4.2.5}$$

The upper bound 1/4 stems from the fact that $\mathbb{P}_1^c\left(V_1^{2k}\right)$ becomes infinite for $k = 1/4$. The value of $k(c)$ converges to 1/4 when c goes to 0, and to 0 when c goes to c_{crit}, as illustrated by Figure 4.1. We may notice that Formula (4.2.3) remains true for $c = 0$ and $k = 1/4$ (and for $c = c_{crit}$ and $k = 0$, in a certain sense).

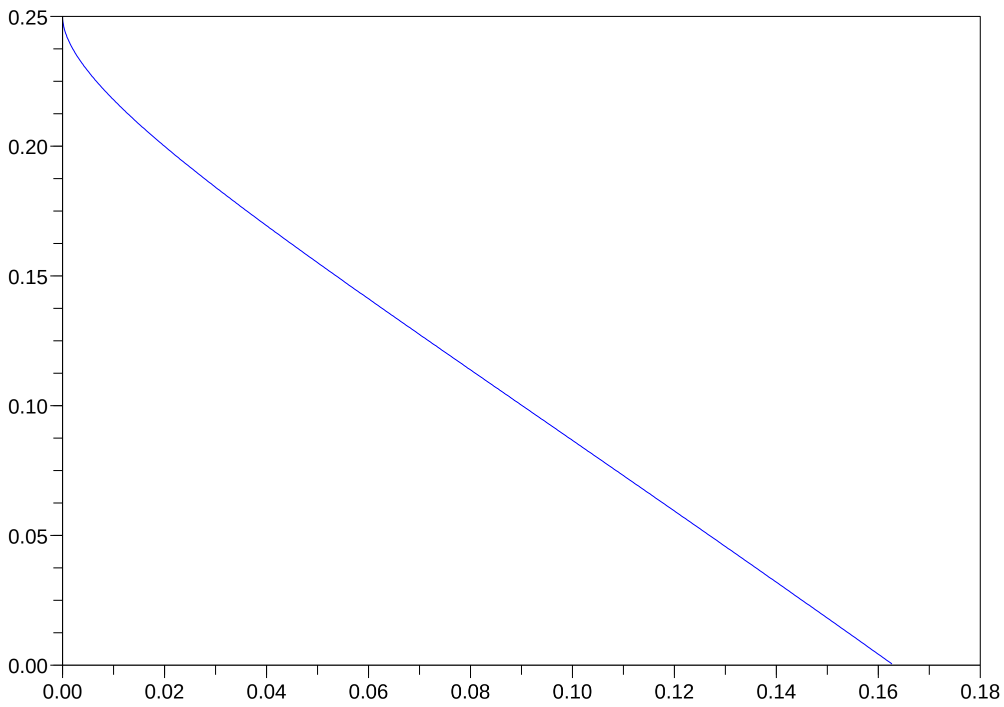

Figure 4.1: Graph of the exponent k(c)

Proof. Formula (4.2.2) already appears as Formula 3.2.4 in the proof of Lemma 4 in Chapter 3. The function $x \mapsto \mathbb{P}_1^c\left(V_1^x\right)$ is convex, takes value 1 at $x = 0$ and becomes infinite at $x = 1/2$. Its derivative at 0 is equal to $\mathbb{P}_1^c(S_1 - S_0) < 0$. We deduce that there is indeed a unique $k(c)$ in $(0, \frac{1}{4})$ such that $\mathbb{P}_1^c\left(V_1^{2k}\right) = 1$.

Now, the estimate (4.2.3) will appear as a particular case of an "implicit renewal theory" result of Goldie [14]. Let us express ζ_∞ as the series:

$$\zeta_\infty \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_n - \zeta_{n-1}}{V_{n-1}^2} V_{n-1}^2,$$

with $V_n^2 := V_1^2 \frac{V_2^2}{V_1^2} \cdots \frac{V_n^2}{V_{n-1}^2}$, and where $\left(\frac{\zeta_n - \zeta_{n-1}}{V_{n-1}^2}, \frac{V_n^2}{V_{n-1}^2}\right)_{n\geq 1}$ is i.i.d. We lie in the setting of Section 4 of Goldie's paper [14], and can apply its Theorem (4.1). Indeed, all the following conditions are satisfied:

$$\mathbb{P}_1^c(V_1^{2k}) = 1,$$
$$\mathbb{P}_1^c(V_1^{2k} \ln(V_1^2)) < \infty,$$
$$\mathbb{P}_1^c(\zeta_1^k) < \infty,$$

the last one being a consequence of the inequality $k < 1/4$ and the fact that:

$$\mathbb{P}_1^c(\zeta_1 > t) \underset{t\to\infty}{\sim} c' t^{-\frac{1}{4}}. \tag{4.2.6}$$

Formula (4.2.6) itself, which was already given as in Lemma 4 in Chapter 3, is a consequence of a result of Goldman [15]. All this is enough to apply the theorem in Goldie and deduce the requested result, namely

$$\mathbb{P}_1^c(\zeta_\infty > t) \sim C_1 t^{-k},$$

where C_1 is the constant belonging to $(0,\infty)$ defined by (4.2.4). □

Next section is devoted to the definition and study of the reflected Kolmogorov process, conditioned on never hitting $(0,0)$. This process will be of great use for studying the recurrent extensions of the reflected Kolmogorov process in Section 4.4.

4.3 The reflected Kolmogorov process conditioned on never hitting $(0,0)$

4.3.1 Definition via an $h-$transform

Recall that under $\mathbb{P}_1^c$, the sequence $(S_n)_{n\geq 0} = (\ln(V_n))_{n\geq 0}$ is a random walk starting from 0, whose law is written $\mathbf{P}_0$. The important fact $\mathbb{P}_1^c(V_1^{2k}) = 1$ implies $\mathbb{P}_1^c(V_n^{2k}) = 1$ for any $n > 0$, and can be rewritten $\mathbf{P}_0(\theta^{S_n}) = 1$, with $\theta := \exp(2k)$.

The sequence θ^{S_n} being a martingale, we introduce the change of probability

$$\widetilde{\mathbf{P}}_0(S_n \in \mathrm{d}t) = \theta^t \mathbf{P}_0(S_n \in \mathrm{d}t).$$

Under $\widetilde{\mathbf{P}}_0$, $(S_n)_{n\geq 0}$ becomes a random walk drifting to $+\infty$. Informally, it can be viewed as being the law of the random walk S_n under $\mathbf{P}_0$ conditioned on hitting arbitrary high levels.

There is a corresponding change of probability for the reflected Kolmogorov process and its law $\mathbb{P}_1^c$. We introduce the law $\widetilde{\mathbb{P}}_1$ determined by

$$\widetilde{\mathbb{P}}_1(A\mathbb{1}_{\zeta_n > T}) = \mathbb{P}_1^c(A\mathbb{1}_{\zeta_n > T}\mathbb{P}_1^c(V_n^{2k} | \mathcal{F}_T)),$$

for any $n > 0$, stopping-time T and $A \in \mathcal{F}_T$. By the strong Markov property we have

$$\mathbb{P}_1^c(V_n^{2k}|\mathcal{F}_T) = \mathbb{P}^c_{X_T,\dot{X}_T}(V_1^{2k}) \qquad \text{on the event } \{\zeta_n > T\},$$

so that there is the identity

$$\widetilde{\mathbb{P}}_1(A\mathbb{1}_{\zeta_n>T}) = \mathbb{P}_1^c(A\mathbb{1}_{\zeta_n>T}H(X_T,\dot{X}_T)),$$

where we have written

$$H(x,u) := \mathbb{P}^c_{x,u}(V_1^{2k}).$$

Note that $H(0,u) = u^{2k}$. Letting n go to infinity, we get:

$$\widetilde{\mathbb{P}}_1(A\mathbb{1}_{\zeta_\infty>T}) = \mathbb{P}_1^c(A\mathbb{1}_{\zeta_\infty>T}H(X_T,\dot{X}_T)).$$

We have $H(0,1) = 1$, the function H is harmonic for the semigroup of the reflected Kolmogorov process, and the process $\widetilde{\mathbb{P}}_1$ is the $H-$tranform of $\mathbb{P}_1^c$, in the sense of Doob.

Under $\widetilde{\mathbb{P}}_1$, the law of the sequence $(S_n)_{n\geq 0}$ is $\widetilde{\mathbf{P}}_0$, thus this sequence is diverging to $+\infty$, and as a consequence the time ζ_∞ is infinite $\widetilde{\mathbb{P}}_1-$almost surely. The term $\mathbb{1}_{\zeta_\infty>T}$ in $\widetilde{\mathbb{P}}_1(A\mathbb{1}_{\zeta_\infty>T})$ is thus unnecessary. We may now define more generally $\widetilde{\mathbb{P}}_{x,u}$ for any starting position (x,u) as the following $H-$transform:

Definition 6. *Let $(x,u) \in D$ be arbitrary. We define $\widetilde{\mathbb{P}}_{x,u}$ as being the unique measure such that for every stopping-time T we have:*

$$\widetilde{\mathbb{P}}_{x,u}(A) = \frac{1}{H(x,u)}\mathbb{P}^c_{x,u}(AH(X_T,\dot{X}_T), T < \zeta_\infty), \tag{4.3.1}$$

for any $A \in \mathcal{F}_T$.

Proposition 5. *For any $(x,u) \in D$ and $t > 0$, we have*

$$\widetilde{\mathbb{P}}_{x,u}(A) = \lim_{s\to\infty} \mathbb{P}^c_{x,u}(A|\zeta_\infty > s), \tag{4.3.2}$$

for any $A \in \mathcal{F}_t$.

Formula (4.3.2) justifies that we call $\widetilde{\mathbb{P}}_{x,u}$ law of the reflected Kolmogorov process conditioned on never hitting $(0,0)$. We stress that this definition-proposition is very similar to Proposition 2 in [35], where Rivero introduces the self-similar Markov process conditioned on never hitting 0. We also refer to Chapter 2 for a thorough study of other $h-$transforms regarding the (free) Kolmogorov process killed at time ζ_1. Thereafter we will also write $\widetilde{\mathbb{P}}_u$ for $\widetilde{\mathbb{P}}_{0,u}$, and we will denote by $\widetilde{\mathrm{P}}_t$ the semigroup of this process.

We first prove the following lemma, which is a slight improvement of (4.2.3):

Lemma 14. *For any $(x,u) \in D$,*

$$s^k\mathbb{P}^c_{x,u}(\zeta_\infty > s) \longrightarrow_{s\to\infty} H(x,u)C_1. \tag{4.3.3}$$

Proof. For $(x,u)=(0,1)$, this is (4.2.3). For $x=0$, the rescaling invariance property yields immediately

$$s^k\mathbb{P}^c_{0,u}(\zeta_\infty > s) = s^k\mathbb{P}^c_{0,1}(\zeta_\infty > su^{-2}) \longrightarrow u^{2k}C_1 = H(0,u)C_1.$$

For $(x,u)\in D$, the Markov property at time ζ_1 yields

$$\begin{aligned} s^k\mathbb{P}^c_{x,u}(\zeta_\infty > s) &= \mathbb{P}^c_{x,u}(s^k\mathbb{P}^c_{0,V_1}(\zeta_\infty > s-\zeta_1)) \\ &\longrightarrow \mathbb{P}^c_{x,u}(H(0,V_1)C_1) = H(x,u)C_1, \end{aligned}$$

where the convergence holds by dominated convergence. The lemma is proved. □

Equation (4.3.2) then results from:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^c_{x,u}(A|\zeta_\infty > s) &= \frac{1}{\mathbb{P}^c_{x,u}(\zeta_\infty > s)}\mathbb{P}^c_{x,u}\left(A\mathbb{P}^c_{X_t,\dot X_t}(\zeta_\infty > s-t),\zeta_\infty > t\right) \\ &\longrightarrow \frac{1}{H(x,u)}\mathbb{P}^c_{x,u}\left(AH(X_T,\dot X_T),\zeta_\infty > t\right) \\ &= \widetilde{\mathbb{P}}_{x,u}(A). \end{aligned}$$

4.3.2 Starting the conditioned process from $(0,0)$

Now that we have introduced $\widetilde{\mathbb{P}}$, its study will be very similar to that of $\mathbb{P}^c$ in the supercritical case $c > c_{crit}$, done in Chapter 3. The similiarity consists in the following facts, which are true under $\mathbb{P}^c_u$ as well as under $\widetilde{\mathbb{P}}_u$: the sequence $\left(\frac{\zeta_{n+1}-\zeta_n}{V_n^2},\frac{V_{n+1}}{V_n}\right)_{n\geq 0}$ is i.i.d., we know its law explicitly, and the sequence $S_n=\ln(V_n)$ is a random walk with positive drift. As a consequence, a major part of Chapter 3 can be transcribed *mutatis mutandis*. In particular we will get a convergence result for the probabilities $\widetilde{\mathbb{P}}_u$ when u goes to zero, similar to Theorem 3 of Chapter 3.

Under $\widetilde{\mathbb{P}}_1$, the sequence $(S_n)_{n\geq 0}$ is a random walk of law $\widetilde{\mathbf{P}}_0$. Its jump distribution has positive and finite expectation m. The associated strictly ascending ladder height process $(H_n)_{n\geq 0}$, defined by $H_k=S_{n_k}$, where $n_0=0$ and $n_k=\inf\{n>n_{k-1},S_n>S_{n_{k-1}}\}$, is a random walk with positive jumps. Its jump distribution also has positive and finite expectation $m_H\geq m$. The measure

$$m(\mathrm{d}y) := \frac{1}{m_H}\widetilde{\mathbf{P}}_0(H_1>y)\mathrm{d}y. \tag{4.3.4}$$

is the "stationary law of the overshoot", both for the random walks $(S_n)_{n\geq 0}$ and $(H_n)_{n\geq 0}$. The following proposition holds.

Proposition 6. *The family of probability measures $(\widetilde{\mathbb{P}}_v)_{v>0}$ on $\mathcal{C}$ has a weak limit when $v\to 0^+$, which we denote by $\widetilde{\mathbb{P}}_{0^+}$. More precisely, write τ_u for the instant of the first* *bounce with speed greater than u, that is $\tau_u := \inf\{t > 0, X_t = 0, \dot{X}_t > u\}$. Then the law $\widetilde{\mathbb{P}}_{0+}$ satisfies the following properties:*

$$(*) \quad \begin{cases} \lim\limits_{u \to 0^+} \tau_u = 0. \\ \text{Conditionally on } \dot{X}_{\tau_u} = v, \text{ the process } (X_{\tau_u+t}, \dot{X}_{\tau_u+t})_{t\geq 0} \text{ is independent of} \\ (X_s, \dot{X}_s)_{s<\tau_u} \text{ and has law } \widetilde{\mathbb{P}}_v. \end{cases}$$

$(**)$ *The law of $\ln(\dot{X}_{\tau_u}/u)$ is m.*

The complete proof of this proposition follows rightly the proof of Theorem 3 in Chapter 3 and takes many pages. The reader can choose between skipping this proof and go directly to Proposition 7, or read Chapter 3 if (s)he wants to understand the complete proof, or just read the following for an overview of the ideas of the proof, with details given only when significantly different from that in Chapter 3.

Call $\widetilde{\mathbf{P}}_m$ the law of the random walk $(S_n)_{n\geq 0}$ such that the law of the r.v S_0 is m, and $(S_n - S_0)_{n\geq 0}$ has law $\widetilde{\mathbf{P}}_0$ and is independent from S_0. That is, we allow the starting position to be nonconstant and distributed according to m. The reason for the introduction of these laws is the renewal theory. Call $T_y(S)$ the hitting time of (y, ∞) for the random walk S starting from $x < y$. This theory states that the law (under $\widetilde{\mathbf{P}}_x$) of $(S_{n+T_y} - y)_{n\geq 0}$ converges to $\widetilde{\mathbf{P}}_m$ when x goes to $-\infty$. Now, for a process indexed by I an interval of $\mathbb{Z}$, we define a spatial translation operator by $\Theta_y^{sp}((S_n)_{n\in I}) = (S_{n+T_y} - y)_{n\in I - T_y}$. We get that under $\widetilde{\mathbf{P}}_x$ and when x goes to $-\infty$, the translated process $\Theta_y^{sp}(S)$ converges to a process called the "spatially stationary random walk", a process indexed by $\mathbb{Z}$ which is spatially stationary and whose restriction to $\mathbb{N}$ is $\widetilde{\mathbf{P}}_m$ (see Chapter 3). We write $\widetilde{\mathbf{P}}$ for the law of this spatially stationary random walk.

There is clearly a correspondance between the law $\widetilde{\mathbf{P}}_x$ and the law $\widetilde{\mathbb{P}}_{e^x}$. The first one is the law of the underlying random walk $(S_n)_{n\geq 0} = (\ln V_n)_{n\geq 0}$ for a process $(X, \dot{X})$ following the second one. Now, in a very brief shortcut, we can say that the law $\widetilde{\mathbf{P}}$ is corresponding to a law written $\widetilde{\mathbb{P}}^*_{0+}$. And the convergence results of $\widetilde{\mathbf{P}}_x \circ \Theta_y^{sp}$ to $\mathbf{P}$ when $x \to -\infty$ provide convergence results of $\widetilde{\mathbb{P}}_u$ to $\widetilde{\mathbb{P}}^*_{0+}$ when $u \to 0$.

However, there is a huge difference in this correspondance, as the spatially stationary random walk, of law $\widetilde{\mathbf{P}}$, is a process indexed by $\mathbb{Z}$. The value S_0 is thus not equal to the logarithm of the velocity of the process at time 0, but at time τ_1 (recall that $\tau_1 = \inf\{t > 0, X_t = 0, \dot{X}_t \geq 1\}$ is the instant of the first bounce with speed no less than one). The sequence $(S_n)_{n\geq 0}$ is then the sequence of the logarithms of the velocities of the process at the bouncing times, starting from that bounce. The sequence $(S_{-n})_{n\geq 0}$ is the sequence of the logarithms of the velocities of the process at the bouncing times happening *before* that bounce.

In its definition, the law $\widetilde{\mathbb{P}}^*_{0+}$ is the law of a process indexed by $\mathbb{R}^*_+$, constructed "from the random time τ_1". In order for the definition to be clean, we had to prove that the random time τ_1 is finite a.s. It followed from the fact that if $(\zeta_{1,k})_{k\geq 0}$ is an i.i.d. sequence of variables of law that of ζ_1 under $\mathbb{P}_1^c$, then for any $\varepsilon > 0$ there is almost surely only a finite number of indexes k such that $\ln(\zeta_{1,k}) \geq \varepsilon k$. This was based on the formula

$$\mathbb{P}_1^c(\zeta_1 > t) \sim c' t^{-\frac{1}{4}},$$

where c' is some positive constant. Here the same results holds with replacing $\mathbb{P}_1^c$ by $\widetilde{\mathbb{P}}_1$ and is a consequence from:

Lemma 15. *We have, when $t \to \infty$,*

$$\widetilde{\mathbb{P}}_1(\zeta_1 > t) \sim c' t^{k-\frac{1}{4}}, \tag{4.3.5}$$

where c' is some positive constant.

Proof of the lemma. The density of $(\zeta_1, V_1/c)$ under $\widetilde{\mathbb{P}}_1$ is given by

$$f(s,v) := \frac{1}{\mathrm{d}s\mathrm{d}v}\widetilde{\mathbb{P}}_1((\zeta_1, V_1/c) \in \mathrm{d}s\mathrm{d}v) \quad = \quad (cv)^{2k}\frac{3v}{\pi\sqrt{2}s^2}\exp(-2\frac{v^2-v+1}{s})\int_0^{\frac{4v}{s}} e^{-\frac{3\theta}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\pi\theta}}.$$

Thanks to the inequality

$$4\sqrt{\frac{v}{s\pi}}e^{-\frac{6v}{s}} \leq \int_0^{\frac{4v}{s}} e^{-\frac{3\theta}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \leq 4\sqrt{\frac{v}{s\pi}},$$

we may write

$$f(s,v) \quad = \quad (6\sqrt{2}.\pi^{-\frac{3}{2}}c^{2k})s^{-\frac{5}{2}}v^{\frac{3}{2}+2k}e^{-2\frac{v^2}{s}+\frac{v}{s}K(s,v)},$$

where $(s,v) \to K(s,v)$ is continuous and bounded. The marginal density of ζ_1 is thus given by

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{d}s}\widetilde{\mathbb{P}}_1(\zeta_1 \in \mathrm{d}s) \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}_+} f(s,v)\mathrm{d}v \\
&= \quad (3\sqrt{2}.\pi^{-\frac{3}{2}}c^{2k})s^{-\frac{5}{4}+k}\int_{\mathbb{R}_+} w^{\frac{1}{4}+k}e^{-2w+K(s,\sqrt{sw})\sqrt{w/s}}\mathrm{d}w \\
&\sim_{s\to+\infty} \quad (3\sqrt{2}.\pi^{-\frac{3}{2}}c^{2k})s^{-\frac{5}{4}+k}\int_{\mathbb{R}_+} w^{\frac{1}{4}+k}e^{-2w}\mathrm{d}w,
\end{aligned}$$

with the change of variables $w = v^2/s$ and by dominated convergence. Just integrate this equivalence in the neighborhood of $+\infty$ to get

$$\widetilde{\mathbb{P}}_1(\zeta_1 > t) \sim c' t^{k-\frac{1}{4}},$$

with the constant

$$c' = \frac{3\sqrt{2}.\pi^{-\frac{3}{2}}c^{2k}}{\frac{1}{4}-k}\int_{\mathbb{R}_+} w^{\frac{1}{4}+k}e^{-2w}\mathrm{d}w = \frac{3c^{2k}}{\pi^{\frac{3}{2}}2^{\frac{3}{4}+k}}\cdot\frac{1+4k}{1-4k}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}+k\right).$$

□

A second point of this proof differs largely from the one in Chapter 3. For now, we have introduced $\widetilde{\mathbb{P}}^*_{0+}$, the law of a process $(X, \dot{X})$ indexed by $\mathbb{R}^*_+$. As in Chapter 3, this law satisfies conditions $(*)$ and $(**)$, and for any $u > 0$, we have the convergence of the joint law of τ_u and $(X_{\tau_u+t}, \dot{X}_{\tau_u+t})$ under $\widetilde{\mathbb{P}}_v$ to that under $\widetilde{\mathbb{P}}^*_{0+}$. In order to deduce Proposition 6, we need a better control on the process just after time 0. We had to prove two facts. First, the almost sure convergence of $(X_t, \dot{X}_t)$ to $(0, 0)$ when t goes to 0, under $\widetilde{\mathbb{P}}^*_{0+}$. This allows in particular to extend $\widetilde{\mathbb{P}}^*_{0+}$ to $\mathbb{R}_+$ and call the extension $\widetilde{\mathbb{P}}_{0+}$. Second, writing $M_u = \sup\{|\dot{X}_t|, t \in [0, \tau_u[\}$, we should check the following technical result

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists u_0 > 0, \exists v_0 > 0, \forall 0 < v \leq v_0, \quad \widetilde{\mathbb{P}}_v(M_{u_0} \geq \delta) \leq \varepsilon, \tag{4.3.6}$$

which controls the behavior of the process on $[0, \tau_u[$, under $\widetilde{\mathbb{P}}_v$. In Chapter 3, we proved these two facts by using the stochastic differential equation satisfied by the laws $\mathbb{P}^c$. They are of course not available for the laws $\widetilde{\mathbb{P}}$, and we need a new proof. These two results will be based on the following lemma, which we will use again later on. It shows that for any initial condition satisfying $|\dot{X}_0| = u$, the process has at least a probability $K' > 0$ to bounce for the first time with an outgoing velocity greater than the constant $|u|c/2$.

Lemma 16. *There exists a constant $K' > 0$ such that the following inequality holds for any $(x, u) \in D$,*

$$\widetilde{\mathbb{P}}_{x,u}\left(V_1/c \geq \frac{|u|}{2}\right) \geq K'. \tag{4.3.7}$$

Proof. We will prove this lemma with the explicit constant $K' = 1 - \sqrt{3}/\pi > 0$, being aware that this constant is far from being the optimal one. For $u = 0$, there is nothing to prove. By a scaling invariance property we may suppose $u \in \{-1, 1\}$, what we do.

The density $f_{x,u}$ of V_1/c under $\mathbb{P}^c_{x,u}$ is given in Gor'kov [16]. If you write $p_t(x, u; y, v)$ for the transition densities of the (free) Kolmogorov process, given by

$$p_t(x, u; y, v) = \frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} \exp\Big[-\frac{6}{t^3}(y - x - tu)^2 + \frac{6}{t^2}(y - x - tu)(v - u) - \frac{2}{t}(v - u)^2\Big],$$

and $\Phi(x, u; y, v)$ for its total occupation time densities, defined by

$$\Phi(x, u; y, v) := \int_0^\infty p_t(x, u; y, v)dt,$$

then the density $f_{x,u}$ is given by

$$f_{x,u}(v) \quad = \quad v\Big[\Phi(x, u; 0, -v) - \frac{3}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\mu^{\frac{3}{2}}}{\mu^3 + 1}\Phi(x, u; 0, \mu v)d\mu\Big]. \tag{4.3.8}$$

Now, knowing the density of V_1 under $\mathbb{P}^c_{x,u}$, we get that of V_1 under $\widetilde{\mathbb{P}}_{x,u}$ by multiplying it by the increasing function $v \to v^{2k}$. This necessarily increases the probability of being greater than $c/2$. Consequently, it is enough to prove

$$\mathbb{P}^c_{x,u}(V_1/c \geq \frac{1}{2}) \geq K'$$

as soon as $u \in \{-1,1\}$. But very rough bounds give

$$\begin{aligned} f_{x,u}(v) &\leq v\Phi(x,u;0,-v) \\ &\leq v\int_0^\infty \frac{\sqrt{3}}{\pi t^2}\exp(-\frac{(u+v)^2}{2t})\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

For $u \in \{-1,1\}$ and $v \in [0,1/2]$ we have $|u+v| \geq 1/2$ and thus

$$f_{x,u}(v) \leq \frac{v\sqrt{3}}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{t^2}\exp(-\frac{1}{8t})\mathrm{d}t = \frac{8\sqrt{3}}{\pi}v.$$

Consequently,

$$\mathbb{P}_{x,u}(V_1/c \geq \frac{1}{2}) \geq 1 - \int_0^{1/2} \frac{8\sqrt{3}}{\pi}v\mathrm{d}v = 1 - \frac{\sqrt{3}}{\pi} > 0.$$

□

Now, let us prove $(X_t, \dot{X}_t) \to (0,0)$ a.s. under $\widetilde{\mathbb{P}}^*_{0+}$. Observe that the variables $\tau_u = \inf\{t > 0, X_t = 0, \dot{X}_t > u\}$ and $\tau_u^- := \sup\{t < \tau_u, X_t = 0\}$ are almost surely strictly positive and go to zero when u goes to zero. We should show $\dot{X}_t \to 0$.

Let us assume on the contrary that $\dot{X}_t$ is not converging almost surely to 0. Then there would exist a positive x such that $\widetilde{\mathbb{P}}^*_{0+}(T_x = 0) > 0$, where we have written $T_x := \inf\{t > 0, |\dot{X}_t| > x\}$. By self-similarity this would be true for any $x > 0$ and in particular we would have

$$K := \widetilde{\mathbb{P}}^*_{0+}(T_1 = 0) > 0. \tag{4.3.9}$$

Informally, this, together with (4.3.7), should induce that $\tau^-_{c/2}$ takes the value zero with probability at least KK', and give the desired contradiction. However it is not straightforward, because we cannot use a Markov property at time T_1, which can take value 0, while the process is still not defined at time 0. Consider the stopping time $T_1^\varepsilon := \inf\{t > \varepsilon, |\dot{X}_t| > x\}$. For any $\eta > 0$, we have

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \widetilde{\mathbb{P}}^*_{0+}(T_1^\varepsilon < \eta) \geq \widetilde{\mathbb{P}}^*_{0+}(\liminf_{\varepsilon \to 0}\{T_1^\varepsilon < \eta\}) \geq \widetilde{\mathbb{P}}^*_{0+}(T_1 < \eta) \geq K,$$

and in particular there is some $\varepsilon_0(\eta)$ such that for any $\varepsilon < \varepsilon_0(\eta)$,

$$\widetilde{\mathbb{P}}^*_{0+}(T_1^\varepsilon < \eta) \geq \frac{K}{2}. \tag{4.3.10}$$

Now, write θ for the translation operator defined by $\theta_x((X_t)_{t\geq 0}) = (X_{x+t})_{t \geq 0}$, so that $V_1 \circ \theta_{T_1^\varepsilon}$ means the velocity of the process at its first bounce after time T_1^ε. From (4.3.10) and Lemma 16, a Markov property gives, for $\varepsilon < \varepsilon_0(\eta)$,

$$\widetilde{\mathbb{P}}^*_{0+}\left(T_1^\varepsilon < \eta, V_1 \circ \theta_{T_1^\varepsilon} \geq \frac{c}{2}\right) \geq \frac{KK'}{2}.$$

We have *a fortiori* $\widetilde{\mathbb{P}}^*_{0+}(\tau^-_{c/2} \leq \eta) \geq \frac{KK'}{2}$. This result true for any $\eta > 0$ leads to $\widetilde{\mathbb{P}}^*_{0+}(\tau^-_{c/2} = 0) \geq \frac{KK'}{2} > 0$, and we get a contradiction. This shows $(X_t, \dot{X}_t) \to (0,0)$ under $\widetilde{\mathbb{P}}^*_{0+}$, as requested.

Finally, let us prove (4.3.6). Fix $\varepsilon, \delta > 0$. The event $\{M_u \geq \delta\}$ coincides with the event $T_\delta \leq \tau_u$. From a Markov property at time T_δ and (4.3.7), we get, for any $u < c\delta/2$,

$$K'\widetilde{\mathbb{P}}_v(M_u \geq \delta) \leq \widetilde{\mathbb{P}}_v(\dot{X}_{\tau_u} \geq c\delta/2).$$

Choose u_0 such that $\widetilde{\mathbb{P}}_{0+}(\dot{X}_{\tau_{u_0}} \geq c\delta/2) \leq \varepsilon$. Then, from the convergence of the law of $\dot{X}_{\tau_{u_0}}$ under $\widetilde{\mathbb{P}}_v$ to that under $\widetilde{\mathbb{P}}_{0+}$, we get, for v small enough,

$$\widetilde{\mathbb{P}}_v(\dot{X}_{\tau_{u_0}} \geq c\delta/2) - \widetilde{\mathbb{P}}_{0+}(\dot{X}_{\tau_{u_0}} \geq c\delta/2) \leq 2\varepsilon,$$

and hence

$$\widetilde{\mathbb{P}}_v(M_{u_0} \geq \delta) \leq 2\varepsilon/K'.$$

Proposition 6 is proved.

Before going on, we provide the following slightly different proposition, which express $\widetilde{\mathbb{P}}_{0+}$ as the weak limit of the laws $\widetilde{\mathbb{P}}_{x,u}$, where the starting position x does not have to be 0. This is not a big change, a Markov property at time ζ_1 allows to deduce it directly from Proposition 6.

Proposition 7. *The family of probability measures $(\widetilde{\mathbb{P}}_{x,u})_{(x,u)\in D}$ on $\mathcal{C}$ converges weakly to $\widetilde{\mathbb{P}}_{0+}$ as $(x,u) \to (0,0)$. Moreover, the law of $(X_s, \dot{X}_s)$ under $\widetilde{\mathbb{P}}_{0+}$ is an entrance law for the semigroup $\widetilde{\mathrm{P}}_s$.*

4.4 The resurrected process

4.4.1 Itō excursion measure, recurrent extensions, and (SOR) equations

We finally tackle the problem of interest, that is the recurrent extensions of the reflected Kolmogorov process. A recurrent extension of the latter is a Markov process that behaves like the reflected Kolmogorov process until the hitting time [2] of $(0,0)$, but that is defined for any positive times and does not stay at $(0,0)$, in the sense that the Lebesgue measure of the set of times when the process is at $(0,0)$ is almost surely 0. More concisely, we will call such a process a resurrected reflected process.

2. In this section there may be (and actually there will be) an infinite number of bounces just after the initial time, so that ζ_∞, the hitting time of $(0,0)$ is no more equal to $\sup \zeta_n$.

We recall that Itō's program and results of Blumenthal [8] establish an equivalence between the law of recurrent extensions of a Markov process and excursion measures compatible with its semigroup, here P_t^c (where as usually in Itō's excursion theory we identify the measures which are equal up to a multiplicative constant). The *set of excursions* $\mathcal{E}$ is defined by

$$\mathcal{E} := \{(x, \dot{x}) \in \mathcal{C} | \zeta_\infty > 0 \text{ and } x_t \mathbb{1}_{t \geq \zeta_\infty} = 0\}.$$

An excursion measure n compatible with the semigroup P_t^c is defined by the three following properties:

1. The measure n is carried by $\mathcal{E}$.
2. For any $\mathcal{F}_\infty$−measurable function F and any $t > 0$, any $A \in \mathcal{F}_t$,
$$n(F \circ \theta_t, A \cap \{t < \zeta_\infty\}) = n(\mathbb{P}^c_{X_t, \dot{X}_t}(F), A \cap \{t < \zeta_\infty\}).$$
3. $n(1 - e^{-\zeta_\infty}) < \infty$.

We also say that n is a pseudo-excursion measure compatible with the semigroup P_t^c if only the two first properties are satisfied and not necessarily the third one. We recall that the third property is the necessary condition in Itō's program in order for the lengths of the excursions to be summable, hence in order for Itō's program to succeed. Finally, giving an excursion measure n is equivalent to giving the entrance law of this measure, defined by

$$n_s(\mathrm{d}x, \mathrm{d}u) := n((X_s, \dot{X}_s) \in \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}u, s < \zeta_\infty)$$

for $s > 0$.
We are here interested in recurrent extensions which leave $(0, 0)$ continuously. These extensions correspond to excursion measures n which satisfy the additional condition $n((X_0, \dot{X}_0) \neq (0, 0)) = 0$. Finally, these measures correspond to entrance laws n_s which satisfy the additional condition $\lim_{s \to 0} n_s(D^0 \setminus B) = 0$ for any B neighborhood of $(0, 0)$. Our main results are the following:

Theorem 4. *There exists, up to a multiplicative constant, a unique excursion measure* $\mathbf{n}$ *compatible with the semigroup* P_t^c *and such that* $\mathbf{n}((X_0, \dot{X}_0) \neq (0, 0)) = 0$. *We may choose* $\mathbf{n}$ *such that*

$$\mathbf{n}(\zeta_\infty > s) = C_1 s^{-k}, \tag{4.4.1}$$

where C_1 *is the constant defined by* (4.2.4). *The measure* $\mathbf{n}$ *is then characterized by any of the two following formulas:*

$$\mathbf{n}(f(X, \dot{X}), \zeta_\infty > T) = \widetilde{\mathbb{P}}_{0^+}(f(X, \dot{X}) H(X_T, \dot{X}_T)^{-1}), \tag{4.4.2}$$

for any $\mathcal{F}_t$*−stopping time* T *and any* f *positive measurable functional depending only on* $(X_t, \dot{X}_t)_{0 \leq t \leq T}$.

$$\mathbf{n}(f(X, \dot{X}), \zeta_\infty > T) = \lim_{(x,u) \to (0,0)} H(x, u)^{-1} \mathbb{P}^c_{x,u}(f(X, \dot{X}), \zeta_\infty > T), \tag{4.4.3}$$

for any $\mathcal{F}_t$*−stopping time* T *and any* f *positive* continuous *functional depending only on* $(X_t, \dot{X}_t)_{0 \leq t \leq T}$.

Itō's program then constructs a Markov process with associated Itō excursion measure $\mathbf{n}$ and that spends no time at $(0,0)$, that is a recurrent extension, that is a resurrected reflected process. We call its law $\mathbb{P}^r_0$. The second theorem will be the weak existence and solution to equations (SOR), the law of any solution being given by $\mathbb{P}^r_0$. It is implicit in this theorem and until the end of the paper that the initial condition is $(0,0)$, though this generalizes easily to any other initial condition $(x,u) \in D^0$.

Theorem 5. *The law $\mathbb{P}^r_0$ gives the unique solution, in the weak sense, of equations (SOR):*

• *Consider $(X,\dot{X})$ a process of law $\mathbb{P}^r_0$. Then the jumps of $\dot{X}$ on any finite interval are summable and the process W defined by*

$$W_t = \dot{X}_t + (1+c)\sum_{0<s\le t} \dot{X}_{s-} \mathbb{1}_{X_s=0}$$

is a Brownian motion. As a consequence the triplet $(X,\dot{X},W)$ is a solution to (SOR).

• *For any solution $(X,\dot{X},W)$ to (SOR), the law of $(X,\dot{X})$ is $\mathbb{P}^r_0$.*

Remark: It follows that the entrance law of $\mathbf{n}$ is given by any of the two following formulas:

$$\mathbf{n}_s(f) \;=\; \widetilde{\mathbb{P}}_{0+}(f(X_s,\dot{X}_s)H(X_s,\dot{X}_s)^{-1}), \quad s>0, \tag{4.4.4}$$

for $f : D^0 \to \mathbb{R}_+$ measurable.

$$\mathbf{n}_s(f) \;=\; \lim_{(x,u)\to(0,0)} H(x,u)^{-1}\mathbb{P}^c_{x,u}(f(X_s,\dot{X}_s),\zeta_\infty > s), \quad s>0, \tag{4.4.5}$$

for $f : D^0 \to \mathbb{R}_+$ continuous.

Formulas similar to these are found in the case of self-similar Markov processes studied by Rivero [35]. This ends the parallel between our works. Rivero underlined that the self-similar Markov process conditioned on never hitting 0 that he introduced plays the same role as the Bessel process for the Brownian motion. In our model, this role is played by the reflected Kolmogorov process conditioned on never hitting $(0,0)$. Here is a short presentation of this parallel. Write P_x for the law of a Brownian motion starting from position x, $\widetilde{P}_x$ for the law of the "three dimensional" Bessel process starting from x. Write n for the Itō excursion measure of the absolute value of the Brownian motion (that is, the Brownian motion reflected at 0), and ζ for the hitting time of 0. Then the inverse function is excessive (nonnegative and superharmonic) for the Bessel process and we have the two well-known formulas

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}(f(X),\zeta > T) &= \widetilde{P}_0(f(X)/X_T)\\
\mathbf{n}(f(X),\zeta > T) &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}P_x(f(X),\zeta > T),
\end{aligned}$$

for any $\mathcal{F}_t$−stopping time T and any f positive measurable functional (resp. continuous functional for the second formula) depending only on $(X_t)_{0\le t\le T}$.

Besides, let us give an application of Formula (4.4.1). Write l for the local time spent by X at zero, under $\mathbb{P}_0^r$. Formula (4.4.1) implies that the inverse local time l^{-1} is a subordinator with jumping measure Π satisfying $\Pi(\zeta_\infty > s) \propto s^{-k}$. That is, it is a stable subordinator of index k. A well-known result of Taylor and Wendel [39] then gives that the exact Hausdorff function of the closure of its range (the range is the image of $\mathbb{R}_+$ by l^{-1}) is given by $\phi(\varepsilon) = \varepsilon^k(\ln\ln 1/\varepsilon)^{1-k}$ almost surely. The closure of the range of l^{-1} being equal to the zero set $\mathcal{Z} := \{t \geq 0 : X_t = \dot{X}_t = 0\}$, we get the following corollary:

Corollary 9. *The exact Hausdorff function of the set of the passage times to* $(0,0)$ *of the resurrected reflected Kolmogorov process is* $\phi(\varepsilon) = \varepsilon^k(\ln\ln 1/\varepsilon)^{1-k}$ *almost surely.*

It is also clear that the set of the bouncing times of the resurrected reflected process – the moments when the process is at zero with a nonzero speed – is countable. Hence the same result holds for the zero set of the resurrected reflected Langevin process.

Next two sections are devoted to the proofs of the two theorems.

4.4.2 The unique recurrent extension compatible with P_t^c

Construction of the excursion measure

The function $1/H$ is excessive for the semigroup $\widetilde{\mathrm{P}}_t$ and the corresponding $h-$transform is P_t^c (see Definition 6). Write $\mathbf{n}$ for the $h-$tranform of $\widetilde{\mathbb{P}}_{0+}$ via this excessive function $1/H$. That is, $\mathbf{n}$ is the unique measure on $\mathcal{C}$ carried by $\{\zeta_\infty > 0\}$ such that under $\mathbf{n}$ the coordinate process is Markovian with semigroup P_t^c, and for any $\mathcal{F}_t-$stopping time T and any A_T in $\mathcal{F}_T$, we have

$$\mathbf{n}(A_T, T < \zeta_\infty) = \widetilde{\mathbb{P}}_{0+}(A_T, H(X_T, \dot{X}_T)^{-1}).$$

Therefore $\mathbf{n}$ is a pseudo-excursion measure compatible with semigroup P_t^c, verifying $\mathbf{n}((X_0, \dot{X}_0) \neq (0,0)) = 0$, and which satisfies Formula (4.4.2). For f continuous functional depending only on $(X_t, \dot{X}_t)_{t \leq T}$, we have

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{P}}_{0+}(f(X_s, \dot{X}_s)H(X_s, \dot{X}_s)^{-1}) &= \lim_{(x,u)\to(0,0)} \widetilde{\mathbb{P}}_{x,u}(f(X_s, \dot{X}_s)H(X_s, \dot{X}_s)^{-1}) \\ &= \lim_{(x,u)\to(0,0)} \frac{1}{H(x,u)} \mathbb{P}^c_{x,u}(f(X_s, \dot{X}_s), \zeta_\infty > s),\end{aligned}$$

so that the pseudo-excursion measure $\mathbf{n}$ also satisfies Formula (4.4.3). In particular, taking $T = s$ and $f = 1$, and considering the limit along the half-line $x = 0$, this gives

$$\mathbf{n}(\zeta_\infty > s) = \lim_{u\to 0} u^{-2k}\mathbb{P}_{0,u}(\zeta_\infty > s).$$

Using Lemma 14 and the scaling invariance property, we get

$$\mathbf{n}(\zeta_\infty > s) = C_1 s^{-k},$$

where C_1 is the constant defined by (4.2.4). This is exactly Formula (4.4.1). This formula gives, in particular,

$$\mathbf{n}(1 - e^{-\zeta_\infty}) = C_1 \Gamma(1-k),$$

where Γ denotes the usual Gamma function. Hence, $\mathbf{n}$ is an excursion measure.

Finally, in order to prove Theorem 4 we just need to prove that $\mathbf{n}$ is the only excursion measure compatible with the semigroup P_t^c such that $\mathbf{n}((X_0, \dot{X}_0) \neq (0,0)) = 0$. In other words, we should show the uniqueness of the law of the resurrected reflected process.

Uniqueness of the excursion measure

Let $\mathbf{n}'$ be such an excursion measure, compatible with the semigroup P_t^c, and satisfying $\mathbf{n}'((X_0, \dot{X}_0) \neq (0,0)) = 0$. We will prove that $\mathbf{n}$ and $\mathbf{n}'$ coincide, up to a multiplicative constant. Recall that ζ_1 is defined as the infimum of $\{t > 0, X_t = 0\}$.

Lemma 17. *The measure* $\mathbf{n}'$ *satisfies:*

$$\mathbf{n}'(\zeta_1 \neq 0) = 0$$

Proof. This condition will appear to be necessary to have the third property of excursion measures, that is $\mathbf{n}'(1 - e^{-\zeta_\infty}) < \infty$. Suppose on the contrary that $\mathbf{n}'(\zeta_1 \neq 0) > 0$ and write $\tilde{\mathbf{n}}(\cdot) = \mathbf{n}'(\cdot \mathbb{1}_{\zeta_1 \neq 0})$. The measure $\tilde{\mathbf{n}}$ is an excursion measure compatible with the semigroup P_t^c such that $\tilde{\mathbf{n}}((X_0, \dot{X}_0) \neq (0,0)) = 0$, satisfying $\tilde{\mathbf{n}}(\zeta_1 = 0) = 0$. Consider $\overline{\mathbf{n}}((X_t, \dot{X}_t)_{t \geq 0}) := \tilde{\mathbf{n}}((X_t \mathbb{1}_{t < \zeta_1}, \dot{X}_t \mathbb{1}_{t < \zeta_1})_{t \geq 0})$ the excursion measure of the process killed at time ζ_1.

The measure $\overline{\mathbf{n}}$ is an excursion measure compatible with the semigroup P_t^0, semigroup of the Kolmogorov process killed at time ζ_1 (the first hitting time of $\{0\} \times \mathbb{R}$). Thus its first marginal must be the excursion measure of the Langevin process reflected on an inelastic boundary, introduced and studied in [4]. In particular, under $\overline{\mathbf{n}}$, the absolute value of the incoming speed at time ζ_1, or $|\dot{X}_{\zeta_1 -}|$, is distributed proportionally to $v^{-\frac{3}{2}} \mathrm{d}v$ (see [4], Corollary 2, (ii)). This stays true under $\tilde{\mathbf{n}}$ and implies that $V_1 = c|\dot{X}_{\zeta_1 -}|$ is also distributed proportionally to $v^{-\frac{3}{2}} \mathrm{d}v$. Now, a Markov property at the stopping time ζ_1 under $\tilde{\mathbf{n}}$ gives

$$\tilde{\mathbf{n}}(\zeta_\infty - \zeta_1 > t | V_1 = v) = \mathbb{P}_v^c(\zeta_\infty > t) = \mathbb{P}_1^c(\zeta_\infty > v^{-2} t) \sim_{v^{-2}t \to \infty} C v^{2k} t^{-k}$$

As a consequence the quantity $v \to v^{-\frac{3}{2}} \tilde{\mathbf{n}}(\zeta_\infty - \zeta_1 > t | V_1 = v)$ is not integrable in the neighborhood of 0. That is $\tilde{\mathbf{n}}(\zeta_\infty - \zeta_1 > t) = +\infty$, we get a contradiction. □

Recall that we owe to prove that $\mathbf{n}'$ and $\mathbf{n}$ are equal, up to a multiplicative constant. Let us work on the corresponding entrance laws. Take $s > 0$ and f a bounded continuous function. It is sufficient to prove $\mathbf{n}'_s(f) = C \mathbf{n}_s(f)$, where C is a constant independent of s and f.

By reformulating Lemma 17, time ζ_1 is zero $\mathbf{n}'$-almost surely, in the sense that the $\mathbf{n}'$-measure of the complementary event is zero. This together with $\dot{X}_0 = 0$ implies that

$\mathbf{n}'$-almost surely, the time τ_u (which, we recall, is the instant of the first bounce with speed greater than u) is going to 0 when u is going to 0.
We deduce, from the continuity of f and the right-continuity of the paths,

$$\mathbf{n}'_s(f) = \lim_{u\to 0} \mathbf{n}'(f(X_{s+\tau_u}, \dot{X}_{s+\tau_u})\mathbb{1}_{\tau_u<\infty}). \tag{4.4.6}$$

An application of the Markov property gives

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'(f(X_{s+\tau_u}, \dot{X}_{s+\tau_u})\mathbb{1}_{\tau_u<\infty}) &= \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{n}'(\dot{X}_{\tau_u} \in \mathrm{d}v)\mathbb{P}^c_v(f(X_s, \dot{X}_s)) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{n}'(\dot{X}_{\tau_u} \in \mathrm{d}v)v^{2k}g(v), \end{aligned}$$

where $g(v) = v^{-2k}\mathbb{P}^c_v(f(X_s, \dot{X}_s))$. The function $v^{2k}g(v)$ is bounded by $\|f\|_\infty$. Besides, Formula (4.4.3) yields that $g(v)$ has a limit when $v \to 0$, that is $\mathbf{n}_s(f)$ (recall $v^{2k} = H(0, v)$). Moreover, for any $\varepsilon > 0$ we have $\mathbf{n}'(\dot{X}_{\tau_u} > \varepsilon) \to 0$ when $u \to 0$. Informally, all this explains that when u is small, all the mass in the integral is concentrated in the neighborhood of 0, where we can replace $g(v)$ by $\mathbf{n}_s(f)$. More precisely, write

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{n}'(\dot{X}_{\tau_u} \in \mathrm{d}v)v^{2k}g(v) = I(u) + J(u) + K(u),$$

where

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_0^\infty \mathbf{n}'(\dot{X}_{\tau_u} \in \mathrm{d}v)(1 \wedge v^{2k})\mathbf{n}_s(f), \\ J(u) &= \int_0^\infty \mathbf{n}'(\dot{X}_{\tau_u} \in \mathrm{d}v)(1 \wedge v^{2k})(g(v) - \mathbf{n}_s(f)), \\ K(u) &= \int_1^\infty \mathbf{n}'(\dot{X}_{\tau_u} \in \mathrm{d}v)(v^{2k} - 1)g(v). \end{aligned}$$

Then $K(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$. By splitting the integrals in the expressions of $I(u)$ and $J(u)$, we also deduce that $J(u)$ is negligible compared to

$$1 \vee I(u).$$

Recalling that the sum $I(u) + J(u) + K(u)$ converges to $\mathbf{n}'_s(f)$ (Formula (4.4.6)), we get that $I(u)$ converges to $\mathbf{n}'_s(f)$ when $u \to 0$, while $J(u)$ and $K(u)$ are converging to 0.

We thus have

$$\mathbf{n}'_s(f) = C\mathbf{n}_s(f),$$

where C is independent of s and f and given by

$$C = \lim_{u\to 0} \int_0^\infty \mathbf{n}'(\dot{X}_{\tau_u} \in \mathrm{d}v)(1 \wedge v^{2k}).$$

The uniqueness follows. Theorem 4 is proved.

4.4.3 The weak unique solution to the (SOR) equations

We now prove Theorem 5:

Weak solution

We consider, under $\mathbb{P}_0^r$, the coordinate process $(X, \dot{X})$, and its natural filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. We first prove that the jumps of $\dot{X}$ are almost-surely summable on any finite interval. As there are only finitely many jumps of amplitude greater than a given constant on any finite interval, a.s., it is enough to prove that the jumps of amplitude less than a given constant are summable. We write L for a local time of the process $(X, \dot{X})$ in $(0,0)$, L^{-1} its inverse, and $\mathbf{n}$ the associated excursion measure. It is sufficient to prove that the expectation of the sum of the jumps of amplitude less than $1 + 1/c$ (jumps at the bouncing times for which the outgoing velocity is less than one), and occurring before time $L^{-1}(1)$, is finite. This expectation is equal to

$$(1+\frac{1}{c})\int_0^1 \mathbf{n}(N_{[v,1]}(X,\dot{X}))\mathrm{d}v,$$

where we write $N_I(X, \dot{X})$ for the number of bounces of the process $(X, \dot{X})$ with outgoing speed included in the interval I. For a fixed v, introduce the sequence of stopping times defined by $\tau_0^v = 0$ and $\tau_{n+1}^v = \inf\{t > \tau_n^v, X_t = 0, \dot{X}_t \in [v, 1]\}$ for $n \geq 0$. Then $N_{[v,1]}(X, \dot{X})$ is also equal to $\sup\{n, \tau_n^v < \zeta_\infty\}$. Thanks to formula (4.4.2), for any $n > 0$, we have:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}(\zeta_\infty > \tau_n^v) &= \widetilde{\mathbb{P}}_{0+}(H(X_{\tau_n^v}, \dot{X}_{\tau_n^v})^{-1}\mathbb{1}_{\tau_n^v<\infty}) \\
&= \widetilde{\mathbb{P}}_{0+}(\dot{X}_{\tau_n^v}^{-2k}\mathbb{1}_{\tau_n^v<\infty}) \\
&\leq v^{-2k}\widetilde{\mathbb{P}}_{0+}(\tau_n^v < \infty).
\end{aligned}$$

As a consequence, we have

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}(N_{[v,1]}(X,\dot{X})) &\leq v^{-2k}\widetilde{\mathbb{P}}_{0+}(\sup\{n, \tau_n^v < \zeta_\infty\}) \\
&\leq v^{-2k}\widetilde{\mathbf{P}}(N^d_{[\ln v, 0]}(S)),
\end{aligned}$$

where we have written $N^d_{[\ln v,0]}(S)$ for the number of instants $n \in \mathbb{Z}$ such that $S_n \in [\ln v, 0]$. Recall also that $\widetilde{\mathbf{P}}$ is the law of the spatially stationary random walk. It is now a simple verification that $\widetilde{\mathbf{P}}(N^d_{[\ln v,0]}(S))$ is finite and proportional to $-\ln v$. It follows

$$\mathbf{n}(N_{[v,1]}(X,\dot{X})) \underset{v\to 0}{=} O(v^{-2k}\ln(1/v))$$

and (recall $k < 1/4$)

$$(1+\frac{1}{c})\int_0^1 \mathbf{n}(N_{[v,1]}(X,\dot{X}))\mathrm{d}v < \infty.$$

The jumps are summable.

Now, write

$$W_t = \dot{X}_t + (1+c) \sum_{0<s\le t} \dot{X}_{s-} \mathbb{1}_{X_s=0}.$$

We aim to show that the continuous process W is a Brownian motion. For $\varepsilon > 0$, we introduce the sequence of stopping times $(T_n^\varepsilon)_{n\ge 0}$ defined by $T_0^\varepsilon = 0$ and, for $n \ge 0$,

$$\begin{cases} T_{2n+1}^\varepsilon &= \inf\{t > T_{2n}^\varepsilon, X_t = 0, \dot{X}_t > \varepsilon\} \\ T_{2n+2}^\varepsilon &= \inf\{t > T_{2n+1}^\varepsilon, X_t = \dot{X}_t = 0\} \end{cases}$$

We also introduce $F^\varepsilon = \bigcup_{n\ge 0}[T_{2n}^\varepsilon, T_{2n+1}^\varepsilon]$ and $H_t^\varepsilon = \mathbb{1}_{F^\varepsilon}(t)$. For $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, we have $H^{\varepsilon'} \le H^\varepsilon$, or equivalently, $F^{\varepsilon'} \subset F^\varepsilon$. When ε goes to $0+$, F^ε converges to the set of zeros $F = \{t, X_t = \dot{X}_t = 0\}$, and H^ε converges pointwisely to $H^0 = \mathbb{1}_F$. The processes H^ε and H^0 are $\mathcal{F}_t-$adapted. We will sometimes omit the superscript ε when it is obvious.

Conditionally on $\dot{X}_{T_{2n+1}} = u$, the process $(X_{(T_{2n+1}+t)\wedge T_{2n+2}})_{t\ge 0}$ is independent of $\mathcal{F}_{T_{2n+1}}$ and has law $\mathbb{P}_u^c$. As a consequence the process $(W_{(T_{2n+1}+t)\wedge T_{2n+2}} - W_{T_{2n+1}})_{t\ge 0}$ is a Brownian motion stopped at time $T_{2n+2} - T_{2n+1}$. Write

$$W_t = \int_0^t H_s^\varepsilon \mathrm{d}W_s + \int_0^t (1 - H_s^\varepsilon)\mathrm{d}W_s.$$

The process $\int_0^t (1 - H_s^\varepsilon)\mathrm{d}W_s$ converges almost surely to $\int_0^t (1 - H_s^0)\mathrm{d}W_s$. But the process $\int_0^t (1 - H_s^0)\mathrm{d}W_s$ is a continuous martingale of quadratic variation $\int_0^t (1 - H_s^0)\mathrm{d}s = t$ and thus a Brownian motion. In order to prove that it actually coincides with W, we just need to prove that the term $D_t^\varepsilon := \int_0^t H_s^\varepsilon \mathrm{d}W_s$ is almost-surely converging to 0 when $\varepsilon \to 0$. We will prove it on the event $t \le L^{-1}(1)$.

This term can be rewritten as

$$\sum_{k\le n} W_{T_{2k+1}} - W_{T_{2k}}$$

if $T_{2n+1} \le t < T_{2n+2}$ and as

$$W_t - W_{T_{2n}} + \sum_{k<n} W_{T_{2k+1}} - W_{T_{2k}}$$

if $T_{2n} \le t < T_{2n+1}$.

Now, for any k, we have

$$W_{T_{2k+1}} - W_{T_{2k}} = \dot{X}_{T_{2k+1}} + (1+c) \sum_{T_{2k}<s\le T_{2k+1}} \dot{X}_{s-} \mathbb{1}_{X_s=0},$$

and for any $T_{2n} \le t < T_{2n+1}$,

$$W_t - W_{T_{2n}} = \dot{X}_t + (1+c) \sum_{T_{2n}<s\le t} \dot{X}_{s-} \mathbb{1}_{X_s=0},$$

Hence the term D^ε_t involves jumps of amplitude less than $(1+c)\varepsilon$, whose sum is going to 0 when ε goes to zero, plus the fraction $c/(1+c)$ of the jumps occurring at times T_{2k+1}, plus the possible extra term $\dot{X}_t$, not corresponding to any jump. We will prove that anyway the jumps occurring at times T_{2k+1}, and $|\dot{X}_t|$, are all small when ε is small enough. It will follow that D^ε_t tends to 0 when ε goes to 0.

Fix $\eta > 0$. Write A^ε for the event

$$\sup_{s \le L^{-1}(1), s \in F^\varepsilon} \dot{X}_s \ge \eta.$$

We will prove that the probability of A^ε is going to 0 when ε goes to 0, so that we almost surely don't lie in A^ε for ε small enough, and as a consequence the jumps occurring at times T_{2k+1} and the possible term $|\dot{X}_t|$ will then all be less than η, as requested. Write $\widetilde{T}^\varepsilon$ for the infimum of $\{t : t \in F^\varepsilon, |\dot{X}_t| \ge \eta\}$ and n_ε for the supremum of $\{n, T_{2n} \le \widetilde{T}^\varepsilon\}$. The event A^ε coincides with $\{\widetilde{T}^\varepsilon < L^{-1}(1)\}$ or $\{T_{2n_\varepsilon+1} < L^{-1}(1)\}$.

The Markov property at the stopping time $\widetilde{T}^\varepsilon$ and the inequality (4.3.7) gives

$$\mathbb{P}(\{\dot{X}_{T_{2n_\varepsilon+1}} \ge \eta c/2\} \cap A^\varepsilon) \ge K' \mathbb{P}(A^\varepsilon).$$

The event $\{\dot{X}_{T_{2n_\varepsilon+1}} \ge \eta c/2\} \cap A^\varepsilon$ implies the event that there is an excursion occurring before time $L^{-1}(1)$ for which the first bounce with speed greater than ε is actually greater than $\eta c/2$. This event has probability

$$\mathbf{n}(T^\varepsilon_1 < \infty, \dot{X}_{T^\varepsilon_1} \ge \eta c/2),$$

where T^ε_1 is still defined as the time of the first bounce with speed greater than ε, here for the excursion. We have:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}(\dot{X}_{T^\varepsilon_1} \ge \eta c/2, \zeta_\infty > T^\varepsilon_1) &= \widetilde{\mathbb{P}}_{0+}(H(0, \dot{X}_{T^\varepsilon_1})^{-1} \mathbb{1}_{\dot{X}_{T^\varepsilon_1} \ge \eta c/2}) \\
&\le (\eta c/2)^{-2k} \widetilde{\mathbb{P}}_{0+}(\dot{X}_{T^\varepsilon_1} \ge \eta c/2) \\
&\le (\eta c/2)^{-2k} m(]\ln(\eta c/(2\varepsilon)), \infty[),
\end{aligned}$$

where we recall that m is the stationary law of the overshoot appearing in Proposition 6. This probability is thus going to 0 when ε goes to 0, as well as $\mathbb{P}(A^\varepsilon)$.

The process W is a Brownian motion, and $(X, \dot{X}, W)$ is a solution to equations (SOR).

Weak uniqueness

Let $(X, \dot{X}, W)$, with associated filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$, and their law $\mathbb{P}$, be a solution to (SOR). Then,

$$\dot{X}_t = W_t - (1+c) \sum_{0<s\le t} \dot{X}_{s-} \mathbb{1}_{X_s=0},$$

with W a Brownian motion. The fact that the process $\dot{X}$ does not explode and that the sum is a sum of positive jumps implies that these jumps are summable. The process $\sum_{0<s\leq t} \dot{X}_{s-} \mathbb{1}_{X_s=0}$ is adapted, hence $\dot{X}$ is a semimartingale. Therefore it possesses local times $(L^a)_{a\in\mathbb{R}}$, and we have an occupation formula (see for example [34], Theorem 70 Corollary 1, p216):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_t^a g(a)\mathrm{d}a = \int_0^t g(\dot{X}_{s-})\mathrm{d}s,$$

for any g bounded measurable function. Taking $g = \mathbb{1}_{\{0\}}$ shows that $\dot{X}$ spends no time at zero. It follows that the process $(X, \dot{X})$ spends no time at $(0,0)$.

The excursions of the process may be of two types. Either an excursion bounces on the boundary just after the initial time, or it doesn't. We call $\mathcal{E}_1$ the set of excursions of the first type, defined by

$$\mathcal{E}_1 := \{(x,\dot{x}) \in \mathcal{E} | \zeta_1 = \inf\{t > 0, x_t = 0\} = 0\},$$

and $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}\backslash\mathcal{E}_1$ the set of excursions of the second type. We aim to show that all excursions of the the process are in $\mathcal{E}_1$.

Like before, we introduce the following notations. For $\varepsilon > 0$, the sequence of stopping times T_n^ε is defined by $T_0^\varepsilon = 0$ and

$$\begin{cases} T_{2n+1}^\varepsilon &= \inf\{t > T_{2n}^\varepsilon, X_t = 0, \dot{X}_t > \varepsilon\} \\ T_{2n+2}^\varepsilon &= \inf\{t > T_{2n+1}^\varepsilon, X_t = \dot{X}_t = 0\}. \end{cases}$$

Set $F^\varepsilon = \bigcup_{n\geq 0}[T_{2n}^\varepsilon, T_{2n+1}^\varepsilon]$ and $H^\varepsilon = \mathbb{1}_{F^\varepsilon}$. Finally, set the closed set $F = \lim_{\varepsilon\to 0} F^\varepsilon$ and the adapted process $H^0 = \mathbb{1}_F$. A close look at F shows that it contains the set of the zeros $\{t | X_t = \dot{X}_t = 0\}$, and all the intervals $[t, t']$ which correspond to the beginning of an excursion of type 2, stopped at ζ_1 the first return time to $\{0\} \times \mathbb{R}$.

We call F_r the set of right ends of the maximal intervals included in F. The set F_r precisely consists of the instants of the first returns to zero of an excursion of type 2. The boundary of F is the union of the set of zeros and of F_r, which is countable. Thus it has zero Lebesgue measure. We have to prove that F actually does not include any interval, almost surely. Otherwise, the process

$$L(t) = \int_0^t H_s^0 \mathrm{d}s$$

is not almost surely constantly equal to zero. We introduce its right-continuous inverse

$$L^{-1}(t) := \inf\{s > t, L(s) > t\}.$$

There exists a Brownian motion M such that for $t < L(\infty)$,

$$M_t = \int_0^{L^{-1}(t)} H_s^0 \mathrm{d}W_s.$$

Introduce the time-changed process

$$(Y_t, \dot{Y}_t) = (X_{L^{-1}(t)}, \dot{X}_{L^{-1}(t)}),$$

stopped at time $L(\infty)$. In order to simplify the redaction, we will often omit to specify "stopped at time $L(\infty)$". This time change induces that the process $(Y, \dot{Y})$ also does not spend any time at zero, and that its excursions are that of $(X, \dot{X})$ belonging to $\mathcal{E}_2$, and stopped at ζ_1 the first return time to $\{0\} \times \mathbb{R}$.

Lemma 18. *The triplet $(Y_t, \dot{Y}_t, M_t)_{t \leq L(\infty)}$ under $\mathbb{P}$ is a solution of the equations (SOR) with null elasticity coefficient, stopped at time $L(\infty)$.*

Proof. Let $[t, t'[$ be the interval corresponding to an excursion of $(Y, \dot{Y})$. The interval $[L^{-1}(t), L^{-1}(t'-)]$ is a maximal interval included in F. The points $L^{-1}(t)$ and $L^{-1}(t')$ belong to $\partial F \backslash F_r$, thus $Y_t = \dot{Y}_t = 0 = Y_{t'} = \dot{Y}_{t'}$.

Let $s \in [t, t'[$. As the process X has no bounce in $[L^{-1}(t), L^{-1}(s)]$ and $(X, \dot{X}, W)$ is a solution to (SOR), we can write

$$\dot{X}_{L^{-1}(s)} = \dot{X}_{L^{-1}(t)} + W_{L^{-1}(s)} - W_{L^{-1}(t)},$$

or equivalently

$$\dot{Y}_s = \dot{Y}_t + M_s - M_t.$$

As a consequence, we may write

$$\begin{cases} Y_s &= Y_t + \displaystyle\int_t^s \dot{Y}_u \mathrm{d}u \\ \dot{Y}_s &= \dot{Y}_t + M_s - M_t - \sum_{t<u\leq s} \dot{Y}_{u-} \mathbb{1}_{Y_u=0}, \end{cases}$$

where the sum is actually empty. Similarly,

$$\begin{cases} Y_{t'} &= 0 = X_{L^{-1}(t'-)} = Y_{t'-} = Y_t + \displaystyle\int_t^{t'} \dot{Y}_u \mathrm{d}u \\ \dot{Y}_{t'} &= \dot{Y}_t + M_{t'} - M_t - \sum_{t<u\leq t'} \dot{Y}_{u-} \mathbb{1}_{Y_u=0}, \end{cases}$$

where the sum now contains one term.

Adding these equalities on the excursion intervals of $(Y, \dot{Y})$, and recalling that this process spends no time at $(0,0)$, gives

$$\begin{cases} Y_s &= \displaystyle\int_0^s \dot{Y}_u \mathrm{d}u \\ \dot{Y}_s &= M_s - \sum_{0<u\leq s} \dot{Y}_{u-} \mathbb{1}_{Y_u=0}, \end{cases}$$

and $(Y, \dot{Y}, M)$ is a solution to (SOR) with null elasticity coefficient (stopped at time $L(\infty)$). $\square$

The article [5], which studied equations (SOR) with null elasticity coefficient, shows that a solution $(Y, \dot{Y})$ must be a Markov process, with Itō excursion law $\overline{\mathbf{n}}$ satisfying

$$\overline{\mathbf{n}}(|\dot{X}_{\zeta_1 -}| \in \mathrm{d}v) = Cv^{-3/2}\mathrm{d}v.$$

Let us now introduce another change of time. For t such that $(X_t, \dot{X}_t) \neq (0,0)$, write e^t for the excursion that the process is currently doing at time t. Introduce the random set

$$A := \{t | (X_t, \dot{X}_t) \neq (0,0), e^t \in \mathcal{E}_2\},$$

and the adapted process $\widetilde{H} = \mathbb{1}_A$. Like before, we define

$$\widetilde{L}(t) = \int_0^t \widetilde{H}_s \mathrm{d}s,$$

write $\widetilde{L}^{-1}$ for its right-continuous inverse, and introduce a Brownian motion $\widetilde{M}$ such that

$$\widetilde{M}_t = \int_0^{\widetilde{L}^{-1}(t)} \widetilde{H}_s \mathrm{d}W_s$$

for $t < \widetilde{L}(\infty)$. Finally we introduce the time-changed process

$$(\widetilde{Y}_t, \dot{\widetilde{Y}}_t) = (X_{\widetilde{L}^{-1}(t)}, \dot{X}_{\widetilde{L}^{-1}(t)}),$$

stopped at time $\widetilde{L}(\infty)$. Remark that we have $\widetilde{L}(\infty) \geq L(\infty)$ because $A \supset F$. Similarly as for $(Y, \dot{Y})$, the process $(\widetilde{Y}, \dot{\widetilde{Y}})$ spends no time at zero and its excursions are the excursions of $(X, \dot{X})$ included in $\mathcal{E}_2$. We also get the following lemma, similar to Lemma 18, and whose proof we leave to the reader.

Lemma 19. *The triplet $(\widetilde{Y}_t, \dot{\widetilde{Y}}_t, \widetilde{M}_t)_{t \leq L(\infty)}$ under $\mathbb{P}$ is a solution of the equations (SOR) (with elasticity coefficient c), stopped at time $\widetilde{L}(\infty)$.*

The process $(\widetilde{Y}, \dot{\widetilde{Y}})$ spends no time at 0, is a solution to (SOR), and its excursions, stopped at ζ_1; the first return time to $\{0\} \times \mathbb{R}$, are precisely that of $(Y, \dot{Y})$. This induces that $(\widetilde{Y}, \dot{\widetilde{Y}})$ is a Markov process with Itō excursion measure $\tilde{\mathbf{n}}$ determined by

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{n}}\left((x_{t\wedge\zeta_1})_{t\geq 0} \in \cdot\right) & = & \overline{\mathbf{n}}(x \in \cdot) \\ \tilde{\mathbf{n}}\left((x_{t+\zeta_1})_{t\geq 0} \in \cdot \,|\, \dot{X}_{\zeta_1} = v\right) & = & \mathbb{P}^c_v(x \in \cdot) \end{cases}$$

As in the proof of Lemma 17, we deduce that $\tilde{\mathbf{n}}(\zeta_\infty > t) = \infty$. The measure $\tilde{\mathbf{n}}$ is thus not an excursion measure, which is a contradiction. Hence, necessarily $\widetilde{L}(\infty) = 0 = L(\infty)$ a.s.

We introduce a third time-change, $(L^\varepsilon)^{-1}(t) := \inf\{s > 0, L^\varepsilon(s) > t\}$. When ε goes to 0, $(L^\varepsilon)^{-1}$ is going to $L^{-1} = Id$. It follows that the process $X^\varepsilon := (X_{(L^\varepsilon)^{-1}(t)})_{t\geq 0}$ is going uniformly on compacts to X when ε goes to 0, almost surely. In particular the law of X is entirely determined by that of X^ε. The law of X^ε is in turn entirely determined by that of $(\dot{X}_{T^\varepsilon_{2n+1}})_{n\geq 0}$. We will now determine this law, which will prove the uniqueness of the law of X.

In order to simplify the notations, we just give the calculation of the law of $\dot{X}_{T_1^1}$, which is not fundamentally different from others. For $\varepsilon > 0$ and $n \geq 0$, a Markov property for the process W applied at time T^ε_{2n+1} shows that conditionally on $\dot{X}_{T^\varepsilon_{2n+1}} = u$, the process $(X_{(T^\varepsilon_{2n+1}+t)\wedge T^\varepsilon_{2n+2}})_{t\geq 0}$ is independent from $\mathcal{F}_{T^\varepsilon_{2n+1}}$ and has law $\mathbb{P}^c_u$. Write n_1 for the integer satisfying $T^\varepsilon_{2n_1+1} \leq T_1^1 < T^\varepsilon_{2n_1+2}$. Conditionally on $\dot{X}_{T^\varepsilon_{2n_1+1}} = u$, the process $(X_{(T^\varepsilon_{2n_1+1}+t)\wedge T^\varepsilon_{2n_1+2}})_{t\geq 0}$ has the law $\mathbb{P}^c_u$ conditioned on reaching a speed greater than one after a bounce.

In other words, the law of $\dot{X}_{T_1^1}$ under $\mathbb{P}(\cdot|\dot{X}_{T^\varepsilon_{2n_1+1}} = u)$ is equal to that of $\dot{X}_{T_1^1}$ under $\mathbb{P}^c_u(\cdot|T_1^1 < \infty)$. Besides, it should be clear now that $\dot{X}_{T^\varepsilon_{2n_1+1}}$ is going to 0 when ε goes to 0. Recall that ζ_∞, the hitting time of $(0,0)$, is the lifetime of the excursion (under $\mathbb{P}^c_u$ as well as under $\mathbf{n}$). For any f positive continuous functional, we have:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^c_u(f(\dot{X}_{T_1^1})|T_1^1 < \zeta_\infty) &= \mathbb{P}^c_u(f(\dot{X}_{T_1^1})\mathbb{1}_{T_1^1<\zeta_\infty})/\mathbb{P}^c_u(\mathbb{1}_{T_1^1<\zeta_\infty}) \\
&= \widetilde{\mathbb{P}}_u(f(\dot{X}_{T_1^1})(H(0,\dot{X}_{T_1^1}))^{-1})/\widetilde{\mathbb{P}}_u((H(0,\dot{X}_{T_1^1}))^{-1}) \\
&\to_{u\to 0} \widetilde{\mathbb{P}}_{0+}(f(\dot{X}_{T_1^1})(H(0,\dot{X}_{T_1^1}))^{-1})/\widetilde{\mathbb{P}}_{0+}((H(0,\dot{X}_{T_1^1}))^{-1}) \\
&= \mathbf{n}(f(\dot{X}_{T_1^1})|T_1^1 < \zeta_\infty),
\end{aligned}$$

where we used successively (4.3.1), Proposition 6 and (a generalization of) (4.4.2). As a consequence, the law of $\dot{X}_{T_1^1}$ under $\mathbb{P}$ is entirely determined as being that of $\dot{X}_{T_1^1}$ under $\mathbf{n}(\cdot|T_1^1 < \zeta_\infty)$. Uniqueness of the stochastic differential equation follows.

Bibliography

[1] J. Azéma. Théorie générale des processus et retournement du temps. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 6:459–519 (1974), 1973.

[2] P. Ballard. The dynamics of discrete mechanical systems with perfect unilateral constraints. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 154:199–274, 2000.

[3] J. Bect. *Processus de Markov diffusifs par morceaux: outils analytiques et numériques.* PhD thesis, Supelec, 2007.

[4] J. Bertoin. Reflecting a Langevin process at an absorbing boundary. *Ann. Probab.*, 35(6):2021–2037, 2007.

[5] J. Bertoin. A second order SDE for the Langevin process reflected at a completely inelastic boundary. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 10(3):625–639, 2008.

[6] J. Bertoin and R. A. Doney. On conditioning a random walk to stay nonnegative. *Ann. Probab.*, 22(4):2152–2167, 1994.

[7] J. Bertoin and M. Savov. Some applications of duality for Lévy processes in a half-line. 60G51, 60J45, 60G18.

[8] R. M. Blumenthal. On construction of Markov processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 63(4):433–444, 1983.

[9] A. Bressan. Incompatibilità dei teoremi di esistenza e di unicità del moto per un tipo molto comune e regolare di sistemi meccanici. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Serie III*, 14:333–348, 1960.

[10] J. L. Doob. Conditional Brownian motion and the boundary limits of harmonic functions. *Bull. Soc. Math. France*, 85:431–458, 1957.

[11] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.* Second edition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.

[12] R. K. Getoor. Excursions of a Markov process. *Ann. Probab.*, 7(2):244–266, 1979.

[13] R. K. Getoor and M. J. Sharpe. Excursions of dual processes. *Adv. in Math.*, 45(3):259–309, 1982.

[14] C. M. Goldie. Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations. *Ann. Appl. Probab.*, 1(1):126–166, 1991.

[15] M. Goldman. On the first passage of the integrated Wiener process. *Ann. Mat. Statist.*, 42:2150–2155, 1971.

[16] J. P. Gor′kov. A formula for the solution of a certain boundary value problem for the stationary equation of Brownian motion. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 223(3):525–528, 1975.

[17] A. Gut. Renewal theory and ladder variables. In *Probability and mathematical statistics*, pages 25–39. Uppsala Univ., Uppsala, 1983.

[18] A. Gut. *Stopped random walks*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, New York, second edition, 2009. Limit theorems and applications.

[19] B. M. Hambly, G. Kersting, and A. E. Kyprianou. Law of the iterated logarithm for oscillating random walks conditioned to stay non-negative. *Stochastic Process. Appl.*, 108(2):327–343, 2003.

[20] E. Jacob. Langevin process reflected on a partially elastic boundary I . *http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00472601/en/*.

[21] E. Jacob. Excursions of the integral of the Brownian motion. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 46(3):869–887, 2010.

[22] A. Lachal. Sur l'intégrale du mouvement brownien. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 311(7):461–464, 1990.

[23] A. Lachal. Sur le premier instant de passage de l'intégrale du mouvement brownien. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 27(3):385–405, 1991.

[24] A. Lachal. L'intégrale du mouvement brownien. *J. Appl. Probab.*, 30(1):17–27, 1993.

[25] A. Lachal. Les temps de passage successifs de l'intégrale du mouvement brownien. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 33(1):1–36, 1997.

[26] A. Lachal. Application de la théorie des excursions à l'intégrale du mouvement brownien. In *Séminaire de Probabilités XXXVII*, volume 1832 of *Lecture Notes in Math.*, pages 109–195. Springer, Berlin, 2003.

[27] M. Lefebvre. First-passage densities of a two-dimensional process. *SIAM J. Appl. Math.*, 49(5):1514–1523, 1989.

[28] B. Maisonneuve. Exit systems. *Ann. Probability*, 3(3):399–411, 1975.

[29] B. Maisonneuve. On the structure of certain excursions of a Markov process. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 47(1):61–67, 1979.

[30] B. Maury. Direct simulation of aggregation phenomena. *Commun. Math. Sci.*, 2(suppl. 1):1–11, 2004.

[31] H. P. McKean, Jr. A winding problem for a resonator driven by a white noise. *J. Math. Kyoto Univ.*, 2:227–235, 1963.

[32] D. Percivale. Uniqueness in the elastic bounce problem. *J. Differential Equations*, 56(2):206–215, 1985.

[33] J. Pitman. Stationary excursions. In *Séminaire de Probabilités, XXI*, volume 1247 of *Lecture Notes in Math.*, pages 289–302. Springer, Berlin, 1987.

[34] P. E. Protter. *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 of *Stochastic Modelling and Applied Probability.* Springer-Verlag, Berlin, 2005. Second edition. Version 2.1, Corrected third printing.

[35] V. Rivero. Recurrent extensions of self-similar Markov processes and Cramér's condition. *Bernoulli*, 11(3):471–509, 2005.

[36] M. Schatzman. A class of nonlinear differential equations of second order in time. *Nonlinear Anal.*, 2(3):355–373, 1978.

[37] M. Schatzman. Uniqueness and continuous dependence on data for one dimensional impact problems. *Math. Comput. Modelling*, 28:1–18, 1998.

[38] F. Spitzer. A Tauberian theorem and its probability interpretation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 94:150–169, 1960.

[39] S. J. Taylor and J. G. Wendel. The exact Hausdorff measure of the zero set of a stable process. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 6:170–180, 1966.

[40] E. Wong. Some results concerning the zero-crossings of Gaussian noise. *SIAM J. Appl. Math.*, 14:1246–1254, 1966.

[41] E. Wong. The distribution of intervals between zeros for a stationary Gaussian process. *SIAM J. Appl. Math.*, 18:67–73, 1970.

[42] M. Woodroofe. A renewal theorem for curved boundaries and moments of first passage times. *Ann. Probability*, 4(1):67–80, 1976.